

SÉRIE A,
N° 2377
N° D'ORDRE :
3249

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

ÉDOUARD **REGENSTREIF**

- 1^{re} THÈSE. — THÉORIE DE LA LENTILLE ÉLECTROSTATIQUE A TROIS ÉLECTRODES.
2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 6 mars 1951 devant la Commission d'examen.

MM. L. DE BROGLIE, *Président.*
Y. ROCARD, } *Examineurs.*
P. GRIVET, }

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1951

SÉRIE A,
N° 2377
N° D'ORDRE :
3249

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

ÉDOUARD REGENSTREIF

1^{re} THÈSE. — THÉORIE DE LA LENTILLE ÉLECTROSTATIQUE A TROIS ÉLECTRODES.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 6 mars 1951 devant la Commission d'examen.

MM. L. DE BROGLIE, *Président.*
Y. ROCARD, } *Examineurs.*
P. GRIVET, }

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR

LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

—
1951

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Doyen..... A. CHÂTELET.

PROFESSEURS

G. JULIA.....	†	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.	SCHAEFFER.....	†	Physiologie des fonctions.
A. DENJOY.....	†	Théorie des Fonctions.	LAFFITTE.....	†	Chimie générale.
L. LUTAUD.....	†	Géographie physique et géologie dynamique.	FAVARD.....		Calcul des probabilités et Physique mathématique.
E. DARMOIS.....	†	Enseignement de Physique.	COULOMB.....	†	Physique du globe.
ROBERT LÉVY.....	†	Physiologie comparée.	M ^{lle} COUSIN.....	†	Biologie animale (P. C. B.).
HENRI VILLAT.....	†	Mécanique des fluides et applications.	CHRÉTIEN.....		Chimie (P. C. B.).
M ^{me} RAMART-LUCAS		Chimie organique.	DRACH.....		Zoologie.
FOCH.....	†	Mécanique physique et expérimentale.	KASTLER.....		Physique.
PAUTHENIER.....	†	Electrotechnique générale.	CHATELET.....	†	Arithmétique et théorie des nombres.
DE BROGLIE.....	†	Théories physiques.	EPHRUSSI.....	†	Génétique.
JOB.....	†	Chimie générale.	WURMSER.....	†	Biologie physico-chimique.
PRENANT.....	†	Anatomie et Histologie comparées.	BAUER.....	†	Chimie-Physique.
COMBES.....	†	Physiologie végétale.	RIVIÈRE.....		Géologie (P. C. B.).
GARNIER.....	†	Géométrie supérieure.	GAUTHERET.....		Biologie végétale (P. C. B.).
PÈRES.....	†	Mécanique rationnelle.	LUCAS.....		Physique.
HACKSPILL.....	†	Chimie minérale.	A. THOMAS.....		Évolution des êtres organisés.
LAUGIER.....	†	Physiologie générale.	ARNULF.....		Optique appliquée.
TOUSSAINT.....	†	Technique aéronautique.	MAX MORAND.....		Physique.
M. CURIE.....	†	Physique (P. C. B.).	SOLEILLET.....		Physique.
G. RIBAUD.....	†	Hautes températures.	FORTIER.....	†	Mécanique expérimentale des fluides.
CHAZY.....	†	Mécanique analytique et Mécanique céleste.	DANJON.....	†	Astronomie.
GROZE.....	†	Physique théorique et Physique céleste.	FROMAGEOT.....	†	Chimie biologique.
DUPONT.....	†	Théories chimiques.	LAPORTE.....	†	Physique générale et Radio-activité.
VALIRON.....	†	Calcul différentiel et calcul intégral.	JANET.....		Mathématiques générales.
BARRABÉ.....	†	Géologie structurale et Géologie appliquée.	PETIT.....	†	Biologie maritime.
VAVON.....	†	Analyse et mesures chimiques	QUENEY.....	†	Météorologie et dynamique atmosphérique.
G. DARMOIS.....	†	Calcul des probabilités et Physique mathématique.	GALLIEN.....		Biologie animale (P. C. B.).
JACQUES BOURCART.	†	Géographie physique et Géologie dynamique.	EICHORN.....		Biologie végétale (P. C. B.).
AUBEL.....	†	Chimie biologique.	DE CUGNAC.....		Biologie végétale (P. C. B.).
M ^{me} JOLIOT-CURIE.	†	Physique générale et Radio-activité.	LAVAL.....		Physique (P. C. B.).
PLANTEFOL.....	†	Botanique.	M ^{lle} CAUCHOIS.....		Chimie-Physique.
CABANNES.....	†	Recherches physiques.	THELLIER.....		Physique du Globe.
GRASSÉ.....	†	Évolution des êtres organisés.	AUDUBERT.....		Électrochimie.
PRÉVOST.....	†	Chimie organique	L'HÉRITIER.....		Génétique.
BOULIGAND.....	†	Application de l'analyse à la Géométrie.	GRIVET.....	†	Radioélectricité.
CHAUDRON.....	†	Chimie appliquée.	PONCIN.....		Mécanique des Fluides.
WYART.....	†	Minéralogie.	THIRY.....	†	Mécanique appliquée.
TEISSIER.....	†	Zoologie.	DUBREIL.....		Mathématiques générales.
MANGENOT.....	†	Biologie végétale.	QUELET.....		Chimie (P. C. B.).
P. AUGER.....	†	Physique quantique et relativité.	CAGNIARD.....		Géophysique appliquée.
MONNIER.....		Physiologie générale.	CHAMPELIER.....		Chimie appliquée.
PIVETEAU.....	†	Géologie.	CUVILLIER.....		Géologie structurale et Géologie appliquée.
ROCARD.....	†	Physique.	JUNG.....		Pétrographie.
H. CARTAN.....	†	Mathématiques générales.	TRILLAT.....		Physique (P. C. B.).
			WIEMANN.....		Chimie (P. C. B.).
			LICHNEROWICZ.....		Mathématiques.
			JACQUINOT.....		Physique (P. C. B.).
			VASSY.....		Physique de l'atmosphère.
			DESTOUCHES.....		Théories physiques.
			PRUVOST.....	†	Géologie.

Secrétaire..... CH. MONIER



A LA MÉMOIRE
DE MON PÈRE

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS

55, Quai des Grands-Augustins, 55

138058-51

Dépôt légal, Imprimeur, 1951, n° 701.

PREMIÈRE THÈSE.

THÉORIE DE LA LENTILLE ÉLECTROSTATIQUE A TROIS ÉLECTRODES

INTRODUCTION.

Depuis la naissance de la microscopie électronique, l'étude de la lentille électrostatique indépendante a fait l'objet de nombreux travaux et une solide armature théorique et expérimentale vient coordonner à présent les phénomènes se rattachant à la formation des images. Cependant, on ne possède pas encore, à l'heure actuelle, un outil mathématique capable de représenter, d'une manière cohérente, l'ensemble des propriétés des lentilles et des miroirs. La plupart des chercheurs [1, 2, 3, 4, 5] sont partis soit de données fournies par la cuve électrolytique, soit de considérations empiriques et ont intégré les équations des trajectoires dans des cas bien déterminés, sans mettre en évidence la possibilité d'une solution générale et synthétique. Ceci est vrai

surtout dans le cas des trajectoires transgaussiennes [6], où, à défaut de données précises concernant la répartition du potentiel dans la lentille, le problème a été abordé d'une manière qualitative seulement [7].

Le but du présent travail est de fournir une théorie générale, applicable à toutes les lentilles électrostatiques indépendantes et aux miroirs qui s'y rattachent. A cet effet, on établit d'abord une expression analytique de la répartition du potentiel sur l'axe de la lentille. On intègre ensuite l'équation de la trajectoire de Gauss. Le prolongement analytique du potentiel en dehors de l'axe permet enfin de résoudre le problème des trajectoires transgaussiennes. A aucun moment n'interviennent dans l'établissement de la théorie des coefficients empiriques ou des données fournies par la cuve électrolytique.

Cet exposé montrera que chaque lentille ou miroir est caractérisé par la valeur particulière que prend un certain paramètre fondamental $\frac{\Phi(0)}{\Phi(z_0)}$ qui conditionne son fonctionnement et détermine ses propriétés.

Les limites de cette théorie et les possibilités de la perfectionner sont enfin indiquées.

POSITION DU PROBLÈME ET MARCHE SUIVIE.

Considérons une lentille électrostatique indépendante ou unipotentielle, formée de trois électrodes

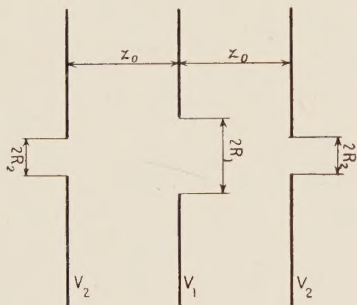


Fig. 1.

planes, minces, parallèles et percées de trous circulaires coaxiaux. Sauf mention contraire, nous nous placerons dans le cas d'une symétrie de révolution rigoureuse et localiserons par suite l'étude dans un plan méridien (*fig. 1*). Nous prendrons comme axe des abscisses z dans ce plan, l'axe de symétrie du système, l'axe des ordonnées r coïncidant avec la trace de l'électrode centrale. Nous appellerons z_0 la distance de l'électrode centrale aux électrodes extérieures, R_1 et R_2 les rayons des diaphragmes des électrodes, V_1 le potentiel de l'électrode centrale, V_2 le potentiel des électrodes extérieures et enfin r_0 la distance à l'axe du rayon incident, initialement parallèle à l'axe.

Le problème que nous nous proposons de résoudre peut être formulé, dans toute sa généralité, de la façon suivante : construire la marche de l'électron, à l'intérieur et à l'extérieur de la lentille (et du miroir) à partir de la structure électrique et géométrique du système. D'une manière plus précise, étant donné les quantités V_1 , V_2 , z_0 , R_1 , R_2 et r_0 , trouver, pour chaque valeur de l'abscisse z , l'or-

donnée r qui définit avec z la trajectoire de l'électron

$$(1) \quad r = r(V_1, V_2, z_0, R_1, R_2, r_0; z).$$

En particulier, lorsque dans cette relation on attribue à r_0 des valeurs très faibles (nous précisons par la suite cette question), on reste dans le cadre de l'optique de Gauss. Dans le cas général, r_0 varie entre zéro et R_2 .

Les équations générales du mouvement de l'électron dans un champ électrique de symétrie axiale étant

$$(2) \quad \begin{cases} q \frac{d^2 z}{dt^2} = e \frac{\partial \phi(z, r)}{\partial z}, \\ q \frac{d^2 r}{dt^2} = e \frac{\partial \phi(z, r)}{\partial r}, \end{cases}$$

il nous faudra, pour résoudre le problème posé, trouver une fonction $\phi(z, r)$ donnant le potentiel en chaque point de coordonnées r, z et introduire cette fonction dans le système (2). Les trajectoires cherchées s'obtiendront par la résolution des équations différentielles (2), soit sous la forme paramétrique

$$(3) \quad z = z(t), \quad r = r(t),$$

soit sous la forme explicite

$$(4) \quad r = r(z).$$

PREMIÈRE PARTIE.

ÉTUDE DE LA RÉPARTITION DU POTENTIEL.

Généralités.

On sait que le champ électrique régnant à l'intérieur de la lentille doit satisfaire aux deux relations classiques

$$(5) \quad \text{div } \mathbf{E} = 0, \quad \text{rot } \mathbf{E} = 0$$

condensées dans l'équation de Laplace

$$(6) \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0.$$

Bien que, du point de vue formel, il soit possible de donner des solutions générales de cette équation, soit sous la forme

$$\phi(z, r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(z + ir \sin \alpha) d\alpha \quad (\text{Voir [8]}),$$

$[\Phi(z)]$ étant la distribution du potentiel sur l'axe], soit sous la forme

$$\phi(z, r) = \sum_{k=0}^{\infty} (A_k \sin kz + B_k \cos kz) J_0(ikr) \quad (\text{Voir [9]}),$$

(J_0 étant la fonction de Bessel d'ordre zéro), il n'est pas possible d'expliciter les solutions particulières de cette équation dans le cas concret du système à trois électrodes qui nous occupe. C'est pour cette raison que dans un grand nombre de cas, la détermination de la répartition du potentiel se fait à l'aide de la cuve électrolytique [1, 2]. Cependant, les mesures à la cuve ne fournissent généralement pas une précision supérieure à quelques pour-cent (à moins de prendre des précautions spéciales), malgré la perte de temps considérable que nécessite sa mise en œuvre. Par exemple, il serait vain de vouloir déterminer à partir de mesures effectuées à la cuve, les dérivées d'ordre supérieur du potentiel sur l'axe. Or, c'est justement la connaissance de ces dérivées qui détermine la précision avec laquelle peut être intégré le système (2).

En effet, en développant la fonction $\phi(z, r)$ en série entière de r ,

$$\phi(z, r) = \Phi(z) + r^2 \Phi_2(z) + r^4 \Phi_4(z) + \dots + r^{2n} \Phi_{2n}(z) + \dots$$

et en substituant ce développement dans l'équation de Laplace (6), on obtient l'expression générale du potentiel en un point quelconque z, r , sous la forme

$$(7) \quad \phi(z, r) = \Phi(z) - \frac{r^2}{4} \Phi''(z) + \frac{r^4}{64} \Phi^{(4)}(z) - \dots \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2 2^{2n}} r^{2n} \Phi^{(2n)}(z).$$

Il résulte immédiatement de (7) et de (2) que les équations générales de la trajectoire de l'électron dans le système lentille-miroir peuvent s'écrire sous la forme

$$(8) \quad \begin{cases} q \frac{d^2 z}{dt^2} = e \left[\Phi'(z) - \frac{r^2}{4} \Phi'''(z) + \dots \right. \\ \quad \left. + \frac{(-1)^n r^{2n}}{2^2 \cdot 4^2 \dots (2n)^2} \Phi^{(2n+1)}(z) + \dots \right], \\ q \frac{d^2 r}{dt^2} = e \left[-\frac{r}{2} \Phi''(z) + \frac{r^3}{16} \Phi^{(4)}(z) - \dots \right. \\ \quad \left. + \frac{(-1)^n r^{2n-1}}{2^2 \cdot 4^2 \dots (2n-2)^2 2n} \Phi^{(2n)}(z) + \dots \right]. \end{cases}$$

Les deux dernières relations montrent que la connaissance de la répartition du potentiel sur l'axe $\Phi(z)$ et de ses dérivées successives permet, en appliquant par exemple un procédé d'intégration

numérique au système (8), de calculer la trajectoire générale de l'électron avec le degré d'approximation voulu.

Le calcul théorique rigoureux de la distribution du potentiel dans la lentille à partir de l'équation de Laplace s'avérant impossible ou tout au moins extrêmement difficile, et la détermination de la répartition du potentiel sur l'axe à partir de mesures effectuées à la cuve ne présentant pas une précision suffisante pour être utilisée au calcul des dérivées d'ordre supérieur nous allons essayer de construire, *a priori*, une fonction $\Phi(z)$, représentant le potentiel sur l'axe, satisfaisant aux conditions limites et, en même temps, suffisamment approchée et assez simple pour être employée à la résolution du système (8). Cette fonction sera nécessairement de la forme

$$\Phi = \Phi(z; R_1, R_2, z_0, V_1, V_2),$$

la variable indépendante étant z et les autres quantités dans la parenthèse caractérisant la structure géométrique et électrique du système. De plus, la lentille étant par définition symétrique, $\Phi(z)$ sera une fonction paire :

$$(9) \quad \Phi(-z) = \Phi(z).$$

Établissement de la répartition du potentiel sur l'axe.

Nous allons déterminer la fonction $\Phi(z)$ en résolvant l'équation de Laplace pour chaque électrode séparément et en associant linéairement les potentiels de ces électrodes, supposées isolées.

Considérons donc une électrode plane, mince, percée d'un trou circulaire de diamètre $2R$, portée à un potentiel V_0 , le champ électrique étant E_1 d'un côté et E_2 de l'autre (*fig. 2*). Dans ce cas, la solution de l'équation de Laplace peut être explicitée complètement. On obtient pour le potentiel sur l'axe du trou [10]

$$(10) \quad \Phi(z) = a + bz + cz \operatorname{arctg} \frac{z}{R},$$

les quantités a, b et c étant fonctions de R, V_0, E_1 et E_2 .

En revenant maintenant à notre lentille indépendante à trois électrodes (*fig. 1*), nous admettons, et ce sera là notre hypothèse fondamentale, que le potentiel sur l'axe résultant de l'action simultanée des trois électrodes peut être représenté par une association linéaire des potentiels produits par chaque électrode, considérée séparément.

Soit donc :

$\Phi_1(z)$ le potentiel sur l'axe dû à l'électrode centrale;

$\Phi_2(z)$ le potentiel sur l'axe dû à l'électrode de droite;

$\Phi_3(z)$ le potentiel sur l'axe dû à l'électrode de gauche.

On a, d'après (10),

$$\Phi_1(z) = a_1 + b_1 z + c_1 z \operatorname{tg} \frac{z}{R_1},$$

$$\Phi_2(z) = a_2 + b_2(z - z_0) + c_2(z - z_0) \operatorname{tg} \frac{z - z_0}{R_2},$$

$$\Phi_3(z) = a_3 + b_3(z + z_0) + c_3(z + z_0) \operatorname{tg} \frac{z + z_0}{R_2}.$$

Notre hypothèse fondamentale se traduit par la relation

$$\Phi(z) = C_1 \Phi_1(z) + C_2 \Phi_2(z) + C_3 \Phi_3(z),$$

soit

$$(11) \quad \Phi(z) = A + Bz + Cz \operatorname{tg} \frac{z}{R_1} + D(z - z_0) \operatorname{tg} \frac{z - z_0}{R_2} + E(z + z_0) \operatorname{tg} \frac{z + z_0}{R_2}.$$

$\Phi(z)$ étant une fonction paire, on a nécessairement $B = 0$, $D = E$.

D'autre part, $\Phi(z)$ doit rester constant à l'infini. En développant l'expression (11), on obtient, pour z très grand,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \Phi(z) = A + Cz \frac{\pi}{2} + 2Dz \frac{\pi}{2}$$

et puisque

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \Phi(z) = \text{const.}, \quad C + 2D = 0.$$

La formule (11) ne contient donc plus que deux constantes arbitraires que nous appellerons a et b

$$(12) \quad \Phi(z) = a + b \left[(z + z_0) \operatorname{tg} \frac{z + z_0}{R_2} + (z - z_0) \operatorname{tg} \frac{z - z_0}{R_2} - 2z \operatorname{tg} \frac{z}{R_1} \right].$$

Pour déterminer les coefficients a et b , il nous faut écrire que le potentiel $\phi(z, r)$ est égal à V_1 le long de l'électrode centrale et à V_2 sur les électrodes extérieures.

On peut exprimer cette propriété en mettant $\phi(z, r)$ sous forme d'un développement en série entière de r [form. (7)]. On calcule alors, à l'aide de la relation (12), les dérivées successives $\Phi''(z)$

$\Phi^{IV}(z)$, ..., $\Phi^{2n}(z)$ et l'on introduit ces expressions dans les deux relations

$$\phi(0, R_1) = V_1, \quad \phi(z_0, R_2) = V_2.$$

On obtient ainsi les deux équations linéaires en a et b :

$$(13) \quad \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2 2^{2n}} R_1^{2n} \Phi^{2n}(0) = V_1, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2 2^{2n}} R_2^{2n} \Phi^{2n}(z_0) = V_2. \end{cases}$$

On peut aussi supposer que dans la relation (12) la variable est non pas z , mais R_1 . En d'autres termes, nous considérons une série de lentilles dont l'électrode centrale possède un diamètre variable $2R_1$.

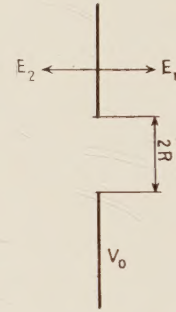


Fig. 2.

Il est clair que si nous faisons tendre R_1 vers des valeurs très faibles, l'électrode tend à se confondre avec une plaque plane dont le potentiel en tout point est V_1 . Or, pour des valeurs très faibles de R_1 , on peut écrire

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{z}{R_1} = \frac{\pi}{2} - \frac{R_1}{z} + \frac{R_1^3}{3z^3} + \dots$$

A la limite, on obtient

$$(14) \quad V_1 = a + 2b \left(R_1 + z_0 \operatorname{tg} \frac{z_0}{R_2} \right).$$

Un raisonnement analogue, appliqué aux électrodes extérieures fournit

$$(15) \quad V_2 = a + b \left(2z_0 \operatorname{tg} \frac{2z_0}{R_2} - 2z_0 \operatorname{tg} \frac{z_0}{R_1} - R_2 \right).$$

La résolution du système (13) conduit aux mêmes relations (14) et (15) que nous mettrons sous la forme

$$(16) \quad a = V_1 - 2b \left(R_1 + z_0 \operatorname{tg} \frac{z_0}{R_2} \right),$$

$$(17) \quad b = - \left(V_2 - V_1 \right) \times \left[2R_1 + 2z_0 \operatorname{tg} \frac{z_0}{R_1} + R_2 + 2z_0 \operatorname{tg} \frac{z_0}{R_2} - 2z_0 \operatorname{tg} \frac{2z_0}{R_2} \right]^{-1}.$$

En définitive, la relation (12) et les deux formules (16) et (17) déterminent entièrement la répartition du potentiel sur l'axe en fonction de l'abscisse z et des constantes électriques et géométriques de la lentille [11]

$$\Phi = \Phi(z; V_1, V_2, R_1, R_2, z_0).$$

Dans le cas, absolument général en pratique, où $\frac{z_0}{R_2}$ est suffisamment grand (de l'ordre de 3 ou supérieur), la valeur de b se réduit très sensiblement à

$$(17') \quad b = - \frac{V_2 - V_1}{2 R_1 + 2 z_0 \operatorname{arctg} \frac{z_0}{R_1}}.$$

Nous verrons plus tard que dans l'intégration des trajectoires électroniques et, partant, dans l'établissement des propriétés du système lentille-miroir, seuls les potentiels au centre et à l'aplomb des électrodes extérieures jouent un rôle essentiel, la répartition réelle du potentiel le long de l'axe n'intervenant qu'à un degré moindre. Nous allons donc calculer ces potentiels, ce qui nous fournira la possibilité de comparer nos résultats avec ceux établis expérimentalement.

Potentiel au centre de la lentille $\Phi(0)$.

En faisant $z = 0$ dans la relation (12) et en tenant compte de (16) et (17'), on obtient

$$\Phi(0) = a + 2 b z_0 \operatorname{arctg} \frac{z_0}{R_2} = V_1 + \frac{(V_2 - V_1) R_1}{R_1 + z_0 \operatorname{arctg} \frac{z_0}{R_1}},$$

soit

$$(18) \quad \Phi(0) = V_1 + \frac{V_2 - V_1}{1 + \frac{z_0}{R_1} \operatorname{arctg} \frac{z_0}{R_1}},$$

formule très simple et fort importante puisqu'elle montre bien ce qui n'avait été établi qu'empiriquement jusqu'à présent, à savoir que le potentiel au centre de la lentille et partant ses principales caractéristiques dépendent essentiellement du rapport $\frac{z_0}{R_1}$.

La structure de la formule (18) explique ainsi la grande inertie du potentiel au centre de la lentille par rapport à une variation du diamètre du trou de l'électrode extérieure, inertie constatée expérimentalement.

Pour obtenir un potentiel au centre $\Phi(0)$ voulu on peut agir soit sur V_1 , soit sur V_2 , soit sur z_0 , soit sur R_1 , soit sur plusieurs de ces quantités à la fois, ce qui fournit, comme nous le verrons, une très

grande souplesse dans la réalisation des miroirs électroniques, des objectifs à aberrations d'ellipticité minima, des projectives à distorsion minimum, etc.

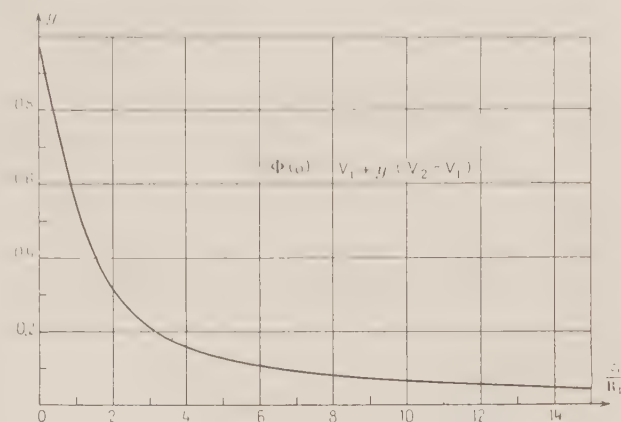


Fig. 3. — Variation du potentiel $\Phi(0)$ en fonction de $\frac{z_0}{R_1}$.

La figure 3 montre la variation du potentiel à l'origine en fonction du paramètre $\frac{z_0}{R_1}$.

Nous allons comparer maintenant les résultats fournis par la formule (18) à ceux obtenus par H. Bruck [1] au cours d'un travail expérimental qui peut être considéré comme fondamental dans l'étude des lentilles électrostatiques. H. Bruck considère une famille de lentilles électrostatiques indépendantes et détermine, pour chacune d'elles, la distribution du potentiel le long de l'axe à l'aide de la

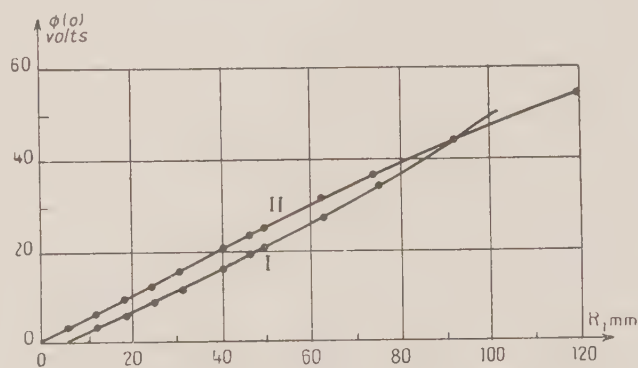


Fig. 4. — Valeurs du potentiel au centre de la lentille en fonction du rayon de l'électrode centrale.

I, courbe relevée expérimentalement par H. Bruck;
II, courbe calculée d'après la relation (18).

cuve électrolytique. Le paramètre essentiel est constitué par le rayon du trou de l'électrode centrale en fonction duquel est donné, notamment, sous forme de tableau, le potentiel à l'origine $\Phi(0)$.

Les valeurs du potentiel $\Phi(0)$ déterminées d'une

part par H. Bruck à l'aide de la cuve et calculées d'autre part, d'après la relation (18), sont représentées dans le Tableau I. Les deux courbes correspondantes ont été tracées dans la figure 4.

TABLEAU I.

Potentiel $\Phi(o)$ au centre de la lentille en fonction du rayon R_1 de l'électrode centrale.

($V_1 = 0V$, $V_2 = 100V$, $R_2 = 25mm$, $z_0 = 127mm$.)

Lentille n°.	R_1 (mm).	$\Phi(o)$ déterminé expérimenta- lement par H. Bruck (V).	$\Phi(o)$ calculé d'après la formule (18) (V).
O.....	0	—	0
I.....	6,25	0,38	3,1
II.....	12,50	3,20	6,2
III.....	18,75	5,9	9,4
IV.....	25	9,0	12,5
V.....	31,25	11,4	15,6
VI.....	40,63	16,3	20,2
VII.....	46,88	19	23,2
VIII.....	50	20,8	24,7
IX.....	62,5	27,3	30,7
X.....	75	34	36,2
XI.....	92,75	43,6	43,5
XII.....	120	—	53,8
XIII.....	∞	—	100

On voit que les valeurs de $\Phi(o)$ mesurées par H. Bruck sont systématiquement trop faibles de 3 à 4 V par rapport aux résultats fournis par la théorie précédente, ceci jusqu'à une certaine valeur, assez élevée de R_1 où les courbes se croisent. La formule (18) montre que pour les grandes valeurs de R_1 , $\Phi(o)$ tend vers une limite

$$\lim_{R_1 \rightarrow \infty} \Phi(o) = V_2.$$

Ceci s'explique évidemment par le fait que, pour R_1 très grand, tout l'espace entre les électrodes extérieures est au potentiel de celles-ci, c'est-à-dire V_2 .

Le problème de la détermination précise du potentiel $\Phi(o)$ pour R_1 très grand peut se poser, par exemple, dans le cas où l'on désire faire fonctionner un microscope électronique en analyseur. Il est alors nécessaire d'accéder à l'image formée dans le plan focal de l'objectif pour la projeter dans le plan objet de la lentille de projection. Ceci nécessite une lentille de faible convergence donc de rayon central assez élevé.

D'autre part, pour les faibles valeurs de R_1 , ($\frac{R_1}{z_0} \leq \frac{1}{3}$) la formule (18) prend la forme extrêmement simple

$$\Phi(o) = V_1 + \frac{V_2 - V_1}{1 + \frac{z_0}{R_1} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{R_1}{z_0} \right)},$$

soit

$$(19) \quad \Phi(o) = V_1 + \frac{2}{\pi} \frac{R_1}{z_0} (V_2 - V_1).$$

Dans ce cas, $\Phi(o)$ est donc une fonction linéaire du paramètre $\frac{R_1}{z_0}$.

L'étude de la fonction $\Phi(o)$ pour les faibles valeurs de R_1 présente une importance considérable dans le cas de la lentille de projection du microscope électronique et dans celui du miroir électrostatique. Dans cette région, les mesures effectuées à la cuve sont sujettes à caution et l'évaluation du potentiel sur des bases théoriques semble s'avérer plus sûre.

Potentiel à l'aplomb des électrodes extérieures $\Phi(z_0)$.

En faisant $z = z_0$ dans la relation (12) et en tenant compte de (16) et (17'), on obtient

$$\Phi(z_0) = a + 2b \left(z_0 \arctg \frac{2z_0}{R_2} - z_0 \arctg \frac{z_0}{R_1} \right),$$

soit

$$(20) \quad \Phi(z_0) = V_1 + (V_2 - V_1) \left[1 - \frac{\frac{R_2}{2R_1}}{1 + \frac{z_0}{R_1} \arctg \frac{z_0}{R_1}} \right].$$

On voit que le potentiel dans le plan des électrodes extérieures dépend des rapports $\frac{z_0}{R_1}$ et $\frac{R_2}{R_1}$. La figure 5 montre la variation du potentiel $\Phi(z_0)$ en fonction de $\frac{z_0}{R_1}$ pour différentes valeurs du paramètre $\frac{R_2}{R_1}$.

Les courbes montrent que lorsque le rapport $\frac{R_2}{R_1}$ est suffisamment faible, le potentiel $\Phi(z_0)$ est sensiblement constant et voisin de V_2 .

La relation (20) permet également de répondre à la question suivante : $\frac{z_0}{R_1}$, V_1 et V_2 étant fixés par les caractéristiques optiques de la lentille que l'on désire réaliser, comment doit-on choisir le rapport $\frac{R_2}{R_1}$ pour que le champ électrique ne s'étende pas trop loin en dehors de la lentille ? Ce problème est important dans le cas de l'objectif du microscope électrostatique où l'on doit prendre garde à ce que l'objet soit placé en dehors du champ.

En résolvant (20) par rapport à $\frac{R_2}{R_1}$ on obtient

$$(21) \quad \frac{R_2}{R_1} = 2 \left(1 + \frac{z_0}{R_1} \arctg \frac{z_0}{R_1} \right) \left[\frac{V_2 - \Phi(z_0)}{V_2 - V_1} \right].$$

Considérons un objectif électrostatique pour lequel $\frac{z_0}{R_1} = 2,5$ (valeur courante). Si nous voulons que le rapport $\frac{V_2 - \Phi(z_0)}{V_2 - V_1}$ soit de 95 %, il faudra que $\frac{R_2}{R_1} = 2 \times 0,05 \times (1 + 2,5 \operatorname{arc} \operatorname{tg} 2,5) = 0,4$.

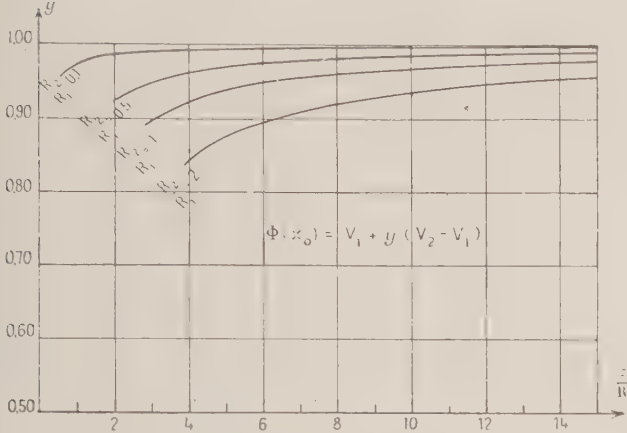


Fig. 5. — Variation du potentiel $\Phi(z_0)$ en fonction de $\frac{z_0}{R_1}$ pour différentes valeurs du paramètre $\frac{R_2}{R_1}$.

Lorsque R_1 est assez faible ($\frac{z_0}{R_1} \geq 3$), la relation (20) prend la forme

$$\Phi(z_0) = V_1 + (V_2 - V_1) \left[1 - \frac{\frac{R_2}{2R_1}}{1 + \frac{z_0}{R_1} \left(\frac{\pi}{2} - R_1 \right)} \right],$$

soit

$$(22) \quad \Phi(z_0) = V_1 + (V_2 - V_1) \left(1 - \frac{R_2}{\pi z_0} \right).$$

Dans ce cas, $\Phi(z_0)$ est donc une fonction linéaire du paramètre $\frac{R_2}{z_0}$ et ne dépend plus de R_1 .

Rapport $\frac{\Phi(0)}{\Phi(z_0)}$.

Le rapport $\frac{\Phi(0)}{\Phi(z_0)}$, qui joue un rôle fondamental dans la suite, et que nous appellerons x , s'écrit en général

$$(23) \quad x = \frac{V_1 + \frac{V_2 - V_1}{1 + \frac{z_0}{R_1} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{z_0}{R_1}}}{V_1 + (V_2 - V_1) \left[1 - \frac{\frac{R_2}{2R_1}}{1 + \frac{z_0}{R_1} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{z_0}{R_1}} \right]}.$$

Lorsque l'on fait $V_1 = 0$, c'est-à-dire lorsqu'on

relie électriquement l'électrode centrale à la cathode, x devient

$$(24) \quad x_0 = \frac{1}{1 + \frac{z_0}{R_1} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{z_0}{R_1} - \frac{R_2}{2R_1}}$$

et pour $\frac{z_0}{R_1} \geq 3$:

$$(25) \quad x_0 = \frac{2R_1}{\pi z_0 - R_2}.$$

Dans le cas, très fréquent, où $R_2 \ll \pi z_0$, on a

$$(26) \quad \boxed{x_0 = \frac{2}{\pi} \frac{R_1}{z_0}}.$$

Allure générale de la courbe du potentiel.

Pour le calcul pratique de la répartition du potentiel dans la lentille, il est commode de mettre la relation (12) sous la forme

$$(27) \quad \Phi(z) = V_1 + \frac{V_2 - V_1}{2 \left(\frac{1}{\mu} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \mu \right)} \left[2 \left(\frac{1}{\mu} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \mu \right) - \left(1 + \frac{z}{z_0} \right) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \eta \left(1 + \frac{z}{z_0} \right) - \left(1 - \frac{z}{z_0} \right) \times \operatorname{arc} \operatorname{tg} \eta \left(1 - \frac{z}{z_0} \right) + 2 \frac{z}{z_0} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \mu \frac{z}{z_0} \right],$$

où

$$\mu = \frac{z_0}{R_1} \quad \text{et} \quad \eta = \frac{z_0}{R_2}.$$

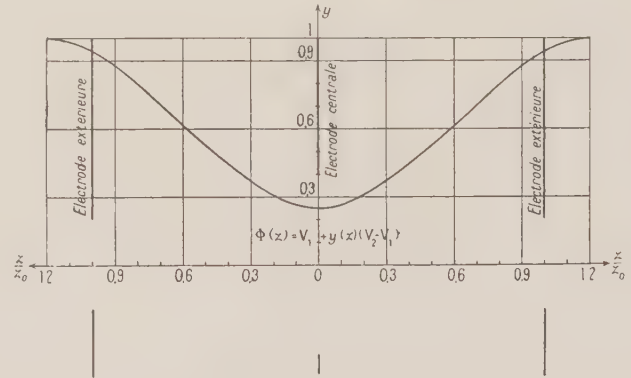


Fig. 6. — Distribution du potentiel sur l'axe dans la famille de lentilles :

$$\frac{z_0}{R_1} = 2,5, \quad \frac{R_2}{R_1} = 0,5.$$

Sous cette forme, on voit que :

1° Le potentiel $\Phi(z)$ est une fonction linéaire des tensions V_1 et V_2 .

2° Le potentiel $\Phi(z)$ est fonction seulement des rapports $\frac{R_1}{z_0}$ et $\frac{R_2}{z_0}$ (où $\frac{R_2}{R_1}$) et non pas des valeurs

particulières que peuvent prendre les éléments de ces rapports. Il en résulte que la répartition du potentiel sur l'axe est invariante par rapport à un changement homothétique des dimensions de la lentille.

La figure 6 montre la courbe du potentiel sur l'axe, calculée d'après la formule (27) dans le cas où $\frac{z_0}{R_1} = 2,5$ et $\frac{R_2}{R_1} = 0,5$ (objectif courant de microscope électrostatique).

La courbe de la répartition de potentiel sur l'axe met en évidence une allure parabolique du potentiel au voisinage de l'origine et l'existence de deux points d'inflexion. Ces notions peuvent être précisées par le calcul. En effet, en développant l'expression (12) au voisinage de l'origine, on obtient

$$\Phi(z) \cong a + b \left(z \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{z_0}{R_2} + z_0 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{z_0}{R_2} + z \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{-z_0}{R_2} - z_0 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{-z_0}{R_2} - \frac{2z^2}{R_1} \right).$$

Soit

$$(28) \quad \Phi(z) = A + Bz^2.$$

Cherchons maintenant les points d'inflexion. Ils sont donnés par

$$\Phi''(\zeta) = 0.$$

En dérivant deux fois l'expression (12) et en groupant les termes, on a

$$(29) \quad \frac{R_2^3}{[R_2^2 + (\zeta - z_0)^2]^2} + \frac{R_2^3}{[R_2^2 + (\zeta + z_0)^2]^2} - \frac{2R_1^3}{(R_1^2 + \zeta^2)^2} = 0.$$

Cette équation s'écrit sensiblement

$$(29') \quad \frac{R_2^3}{[R_2^2 + (\zeta - z_0)^2]^2} = \frac{2R_1^3}{(R_1^2 + \zeta^2)^2}.$$

Cherchons la solution dans le cas courant $\frac{R_2}{R_1} = \frac{1}{2}$; (29') devient alors

$$3\zeta^2 - 8z_0\zeta + 4z_0^2 = 0,$$

ce qui fournit

$$\zeta = \frac{2}{3} z_0.$$

Nous verrons plus tard que, dans tous les cas pratiques, on peut admettre, avec une bonne précision

$$(30) \quad \frac{\zeta}{z_0} = \frac{2}{3}.$$

Nous arrivons ainsi au résultat suivant :

Dans la région centrale, la courbe du potentiel

sur l'axe peut être représentée par une parabole limitée sensiblement aux points $\zeta = \pm \frac{2}{3} z_0$.

Rappelons que la théorie précédente a été établie en supposant les électrodes minces. Les formules données plus haut cessent d'être valables lorsque l'épaisseur de l'électrode centrale devient importante par rapport aux dimensions de la lentille. Nous reviendrons plus loin sur la théorie des lentilles à électrode centrale épaisse.

Représentation du potentiel par des paraboles.

L'expression (12), qui permet de représenter d'une manière correcte la répartition du potentiel sur l'axe de la lentille, ne peut être utilisée par suite de sa complexité, dans l'intégration des équations des trajectoires électroniques.

D'autre part, les valeurs que prend le potentiel dans les régions d'incidence et d'émergence influent très peu sur la forme des trajectoires. En effet, dans ces régions, les électrons sont animés de vitesses élevées, ce qui réduit l'influence du champ électrique. Il est, par contre, indispensable de représenter correctement le potentiel dans la région centrale de la lentille, où, par suite de sa vitesse réduite, l'électron est très sensible à l'action du champ. Or, nous venons de démontrer que, dans la région centrale, le potentiel peut être représenté sensiblement par une expression de la forme

$$\Phi(z) = A + Bz^2.$$

La possibilité de représenter le potentiel dans la région centrale par une parabole, suggère l'extension de cette représentation aux régions d'incidence et d'émergence.

Nous poserons donc, dans ces régions,

$$(31) \quad \Phi(z) = C + D(z \pm z_0)^2.$$

En réalité, les paraboles (31) n'auront pas leurs sommets aux points $\pm z_0$, mais un peu à l'extérieur de la lentille. L'erreur introduite ainsi dans l'intégration de la trajectoire sera cependant négligeable.

Pour déterminer les coefficients A, B, C, D des relations (28) et (31) nous avons d'abord les égalités

$$A = \Phi(0), \quad C = \Phi(z_0).$$

La continuité de la courbe du potentiel permet d'écrire ensuite

$$\begin{aligned} \Phi(0) + B\zeta^2 &= \Phi(z_0) + D(\zeta - z_0)^2, \\ [\Phi(0) + B\zeta^2]'_{\zeta=\frac{2}{3}z_0} &= [\Phi(z_0) + D(\zeta - z_0)^2]'_{\zeta=\frac{2}{3}z_0}; \end{aligned}$$

d'où

$$B = 3 \frac{\Phi(z_0) - \Phi(o)}{z_0^3}, \quad D = -3 \frac{\Phi(z_0) - \Phi(o)}{z_0^3}.$$

En résumé, pour l'intégration des trajectoires, on pourra, avec une bonne approximation, remplacer la courbe du potentiel par les trois expressions suivantes :

$$(32) \quad \begin{cases} \text{Région d'incidence..} & \Phi(z) = \Phi(z_0) - 2n(z + z_0)^2 \\ \text{» centrale.....} & \Phi(z) = \Phi(o) + nz^2 \\ \text{» d'émergence..} & \Phi(z) = \Phi(z_0) - 2n(z - z_0)^2 \end{cases}$$

avec

$$(33) \quad n = \frac{3}{2} \frac{\Phi(z_0) - \Phi(o)}{z_0^2},$$

$\Phi(o)$ et $\Phi(z_0)$ étant déterminés par les relations (18) et (20).

Représentation du potentiel par une quartique.

Il est évidemment plus élégant et plus précis de synthétiser les trois paraboles précédentes par une quartique. Cette représentation est du reste suggérée par la forme même de la courbe du potentiel (fig. 6).

Nous poserons donc, à l'intérieur de la lentille,

$$(34) \quad \Phi(z) = mz^4 + nz^2 + p,$$

m , n et p étant déterminés ici par

$$\Phi(o) = p, \quad \Phi(z_0) = mz_0^4 + nz_0^2 + \Phi(o) \quad \text{et} \quad \Phi'(z_0) = 0,$$

soit

$$(35) \quad \begin{cases} m = -\frac{\Phi(z_0) - \Phi(o)}{z_0^4}, \\ n = 2 \frac{\Phi(z_0) - \Phi(o)}{z_0^2}, \\ p = \Phi(o), \end{cases}$$

$\Phi(o)$ et $\Phi(z_0)$ étant toujours définis par les relations (18) et (20).

En décomposant la quartique en formes tangentes, c'est-à-dire en développant l'expression (34) au voisinage des points $z = 0$ et $z = \pm z_0$, on retrouve évidemment les paraboles (32).

Généralisations.

On peut représenter le potentiel par un polynôme du sixième degré :

$$(36) \quad \Phi(z) = a_6 z^6 + a_4 z^4 + a_2 z^2 + a_0,$$

les coefficients $a_0, \dots, a_6$ s'obtenant à l'aide des relations

$$\begin{aligned} \Phi(o) &= a_0, & \Phi'(z_0) &= 0; \\ \Phi(z_0) &= a_6 z_0^6 + a_4 z_0^4 + a_2 z_0^2 + \Phi(o), & \Phi''(z_0) &= 0; \end{aligned}$$

soit, en développant les calculs,

$$(37) \quad \begin{cases} a_0 = \Phi(o), \\ a_2 = 3 \frac{\Phi(z_0) - \Phi(o)}{z_0^2}, \\ a_4 = -3 \frac{\Phi(z_0) - \Phi(o)}{z_0^4}, \\ a_6 = \frac{\Phi(z_0) - \Phi(o)}{z_0^6}. \end{cases}$$

Quel est le degré de précision de ces différentes représentations ?

Pour répondre à cette question, il faut tenir compte du fait que la trajectoire de Gauss est déterminée par le potentiel $\Phi(z)$ et de sa dérivée première [12], tandis que la connaissance de la

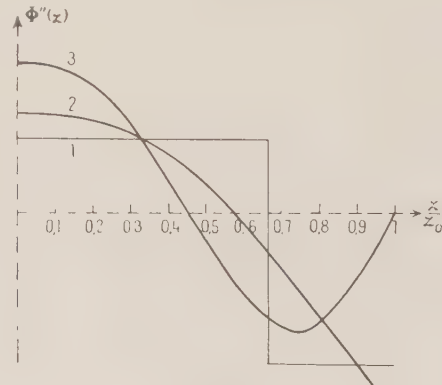


Fig. 7.

dérivée seconde est nécessaire pour l'établissement des trajectoires transgaussiennes [6].

Or, la représentation par paraboles reproduit correctement le potentiel sur l'axe et sa première dérivée. Elle rend également compte du fait que la dérivée seconde du potentiel est positive avant le point d'inflexion et négative ensuite (courbe 1, fig. 7).

La représentation du potentiel par une quartique reproduit l'allure de la dérivée seconde jusque vers $z = 0,8 z_0$ environ (courbe 2, fig. 7).

La représentation par une courbe du sixième degré permet de reproduire correctement l'allure de la dérivée seconde tout le long de l'axe de la lentille (courbe 3, fig. 7).

Si l'on veut représenter le potentiel correctement non seulement sur l'axe de la lentille, mais aussi en dehors de l'axe il faut avoir recours à un polynôme du dixième degré

$$(38) \quad \Phi(z) = \sum_{n=0}^{10} a_{2n} z^{2n},$$

les six coefficients $a_0, \dots, a_{10}$ étant fournis, en fonc-

tion de R_1 , R_2 , z_0 , V_2 , V_1 par les six équations linéaires

$$(39) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi(0) = a_0, \\ \Phi(z_0) = \sum_{n=0}^{n=5} a_{2n} z_0^{2n}, \\ \Phi'(z_0) = 0, \\ \Phi''(z_0) = 0, \\ \sum_{n=0}^{n=5} \frac{(-1)^n}{(n!)^2 2^{2n}} R_1^{2n} \Phi^{2n}(0) = V_1, \\ \sum_{n=0}^{n=5} \frac{(-1)^n}{(n!)^2 2^{2n}} R_2^{2n} \Phi^{2n}(z_0) = V_2. \end{array} \right.$$

Le potentiel en dehors de l'axe est alors donné par

$$(40) \quad \phi(z, r) = \sum_{n=0}^{n=5} \frac{(-1)^n}{(n!)^2 2^{2n}} r^{2n} \Phi^{(2n)}(z).$$

Remarquons que dans la représentation du potentiel sur l'axe par les formules (32), (34) et (36), le point d'inflexion de la courbe du potentiel se déplace à gauche lorsque le degré de polynôme croît (fig. 7). Il n'en est pas de même dans la représentation (38) où la position du point d'inflexion dépend de la structure géométrique de la lentille, comme le montre bien l'équation (29).

En résumé, un polynôme du dixième degré, dont les coefficients peuvent être déterminés uniquement par la théorie permet de représenter correctement le potentiel en tout point de la lentille. Cependant, pour l'obtention de formules explicites donnant les propriétés optiques fondamentales de la lentille, la représentation (32) est suffisante.

Applications de la théorie précédente.

a. FONCTIONNEMENT DE LA LENTILLE EN MIROIR.

— Les relations (12), (18) et (20) que nous avons établies précédemment permettent d'appliquer le calcul à tous les cas qu'on rencontre en pratique, c'est-à-dire lentilles-objectif, lentilles de projection, lentilles survoltées, dévoltées, etc. En particulier la théorie exposée permet d'envisager très commodément le cas du miroir électronique.

La lentille fonctionnera en miroir lorsque les électrons rencontreront un potentiel nul ou négatif par rapport à la cathode. Les tensions V_1 et V_2 étant rapportées au potentiel de la cathode, pris comme origine, notre condition s'écrira $\Phi(0) \leq 0$.

La formule (18) fournit alors

$$V_1 + \frac{V_2 - V_1}{1 - \frac{z_0}{R_1} \operatorname{arc tg} \frac{z_0}{R_1}} \leq 0,$$

soit en résolvant par rapport à $\frac{V_1}{V_2}$:

$$(41) \quad \frac{V_1}{V_2} \leq - \frac{1}{\frac{z_0}{R_1} \operatorname{arc tg} \frac{z_0}{R_1}}.$$

Telle est la condition de blocage ou d'extinction complète [11]. Lorsque

$$(42) \quad - \frac{1}{\frac{z_0}{R_1} \operatorname{arc tg} \frac{z_0}{R_1}} < \frac{V_1}{V_2} < 0,$$

les régions centrales de l'appareil fonctionneront « en lentille », tandis que les régions plus éloignées

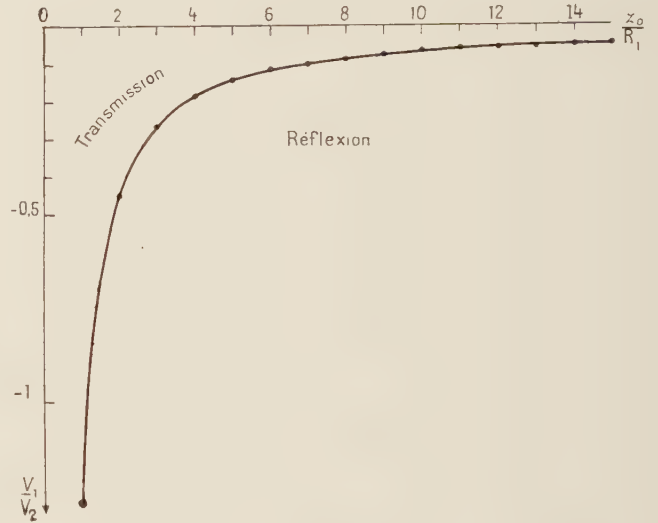


Fig. 8. — Variation du rapport de blocage $\frac{V_1}{V_2}$ en fonction du paramètre $\frac{z_0}{R_1}$.

de l'axe fonctionneront « en miroir ». La « région miroir » sera d'autant plus importante que $\frac{V_1}{V_2}$ sera plus voisin de $-\frac{1}{\frac{z_0}{R_1} \operatorname{arc tg} \frac{z_0}{R_1}}$. Nous reviendrons plus loin sur ce point important.

La figure 8 représente la variation du rapport de blocage en fonction de $\frac{z_0}{R_1}$. La courbe $\frac{V_1}{V_2} = f\left(\frac{z_0}{R_1}\right)$ sépare le plan en deux régions, dont l'une correspond à la transmission (système fonctionnant en lentille), l'autre étant caractéristique de la réflexion.

L'examen de la figure 8 montre que lorsque le point de fonctionnement est situé sur la courbe séparant la région de transmission de la zone de réflexion, le régime sera instable pour les fortes valeurs de $\frac{z_0}{R_1}$, une faible variation du rapport $\frac{V_1}{V_2}$

pouvant transformer le régime de transmission en réflexion et vice versa. On aura donc intérêt à calculer l'appareil de manière que le point de fonctionnement soit situé franchement soit dans une région, soit dans l'autre.

Pour $\frac{z_0}{R_1}$ suffisamment grand, la fonction f est homographique en $\frac{z_0}{R_1}$ et l'on a alors pour la condition de blocage

$$(43) \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{\frac{z_0}{R_1} \frac{\pi}{2} - 1}.$$

A titre d'application numérique, considérons une lentille de projection de microscope électronique, fonctionnant sous une tension de service de 50 000 V et ayant un rapport $\frac{z_0}{R_1} = 5,3$. La relation (43) fournit alors, pour la condition de blocage, $V_1 \cong -6\,800$ V. Les mesures expérimentales effectuées sur un microscope existant (1) sont en très bon accord avec ces résultats.

b. APPLICATION AU CALCUL DES ÉLÉMENTS CARDINAUX DES LENTILLES DE CONVERGENCE MOYENNE ET FAIBLE. — Nous effectuerons plus loin l'intégration de la trajectoire de Gauss dans le cas général. Nous considérons ici uniquement le cas où l'intersection de la trajectoire avec l'axe n'est pas située dans la région centrale de la lentille.

L'équation différentielle de la trajectoire de Gauss, écrite sous la forme

$$(44) \quad R'' = -\frac{3}{16} \left(\frac{\Phi'}{\Phi} \right)^2 R.$$

[où R est la distance à l'axe «réduite» $R(z) = r(z) \Phi^{\frac{1}{2}}(z)$] permet alors de trouver, pour la distance focale de la lentille [13], l'expression

$$(45) \quad \frac{1}{f} = \frac{3}{16} \int_{-z_0}^{z_0} \left[\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} \right]^2 dz.$$

Nous remplacerons dans la relation (45), $\Phi(z)$ par la formule approchée

$$\Phi(z) = \Phi(0) + \frac{\Phi(z_0) - \Phi(0)}{z_0} z.$$

On obtient alors

$$\frac{1}{f} = \frac{3}{8} \int_0^{z_0} \left[\frac{\frac{\Phi(z_0) - \Phi(0)}{z_0}}{\Phi(0) + \frac{\Phi(z_0) - \Phi(0)}{z_0} z} \right]^2 dz,$$

d'où, en effectuant les calculs [14],

$$(46) \quad f = \frac{8}{3} \frac{\Phi(0) \Phi(z_0)}{[\Phi(z_0) - \Phi(0)]^2} z_0.$$

Introduisons maintenant le paramètre fondamental

$$x = \frac{\Phi(0)}{\Phi(z_0)}.$$

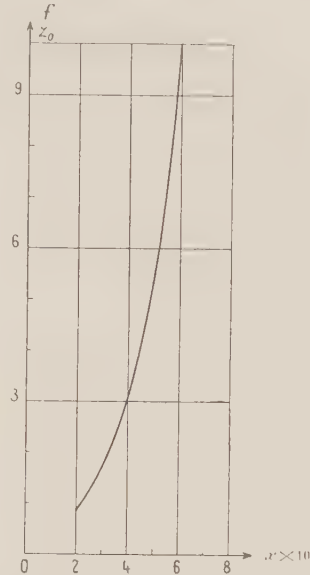


Fig. 9. — Distances focales des lentilles de convergence moyenne et faible.

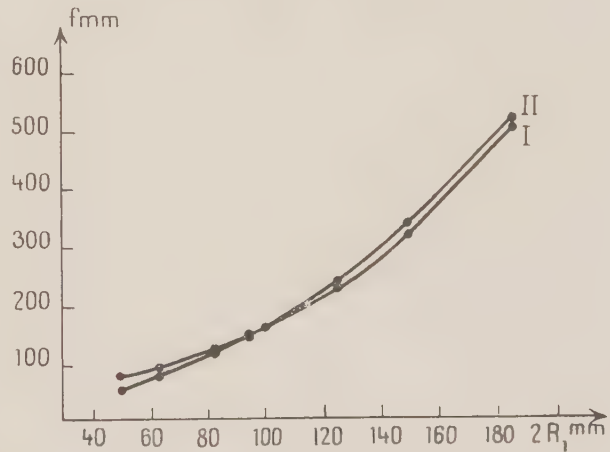


Fig. 10. — Distance focale en fonction du diamètre du trou central.

I, courbe établie par H. Bruck à partir de mesures à la cuve; II, courbe calculée à l'aide de la relation (47).

La relation (46) s'écrit alors

$$(47) \quad f = \frac{8}{3} \frac{x}{(1-x)^2} z_0.$$

La figure 9 montre la variation de la distance focale des lentilles de convergence moyenne et faible

(1) Microscope électronique de la Compagnie Générale de T. S. F., Paris.

en fonction de x . A titre d'application, la figure 10 montre l'accord entre les valeurs des distances focales ainsi calculées et celles établies pour une série de lentilles à partir de mesures à la cuve électrolytique [1].

La formule (47) nous a permis également de calculer, avec une bonne approximation, les lentilles mesurées par H. Castaing aux Laboratoires de l'O. N. E. R. A.

Pour les lentilles de convergence moyenne et faible on peut admettre sans grande erreur que le plan principal de la lentille est confondu avec son plan de symétrie. La formule (47) détermine alors entièrement les éléments du premier ordre de la lentille.

C. APPLICATION AU CALCUL DU COEFFICIENT D'ABERRATION CHROMATIQUE. — $R(z)$ étant toujours la distance à l'axe réduite, le coefficient d'aberration chromatique est donné par la relation [15]

$$(48) \quad C_c = \frac{3}{8} \frac{\Phi(z_F)}{[R'(z_F)]^2} \int_{z_0}^{z_F} \frac{\Phi'^2}{\Phi^3} dz,$$

qui s'écrit avec nos hypothèses

$$C_c = \frac{3}{8} \frac{\Phi(z_0)}{[R'(z_0)]^2} 2I,$$

avec

$$I = \int_0^{z_0} \frac{\left[\frac{\Phi(z_0) - \Phi(0)}{z_0} \right]^2}{\left[\Phi(0) + \frac{\Phi(z_0) - \Phi(0)}{z_0} z \right]^3} dz,$$

soit, en effectuant les calculs :

$$(49) \quad C_c = \frac{8}{3} \Phi(z_0) \frac{\Phi(z_0) + \Phi(0)}{[\Phi(z_0) - \Phi(0)]^2} z_0.$$

Posons encore $x = \frac{\Phi(0)}{\Phi(z_0)}$. On obtient

$$(50) \quad C_c = \frac{8}{3} \frac{1+x}{(1-x)^2} z_0.$$

Le Tableau II montre la comparaison entre les valeurs calculées à l'aide de la relation (50) et celles obtenues par H. Bruck [1] à partir de mesures à la cuve.

TABLEAU II.

*Lentille électrostatique indépendante
à trois diaphragmes.*

($V_1 = 0V$, $V_2 = 100V$, $z_0 = 127\text{ mm}$, $R_2 = 25\text{ mm}$).

Rayon du diaphragme central (R_1) (mm).	Constante d'aberration chromatique (mm)	
	calculée.	déterminée à partir de mesures à la cuve.
97,75.....	1 700	1 450
75.....	1 230	1 030
62,5.....	990	840
50.....	790	680

DEUXIÈME PARTIE.

LA LENTILLE ÉLECTROSTATIQUE INDÉPENDANTE ET LE MIROIR ÉLECTRONIQUE DANS L'APPROXIMATION DE GAUSS.

Généralités.

Nous nous proposons ici d'intégrer les équations différentielles qui définissent les trajectoires de Gauss dans la lentille électrostatique indépendante et de déterminer ainsi les éléments du premier ordre du système lentille-miroir (distances focales, intersection des rayons, position des plans princi-

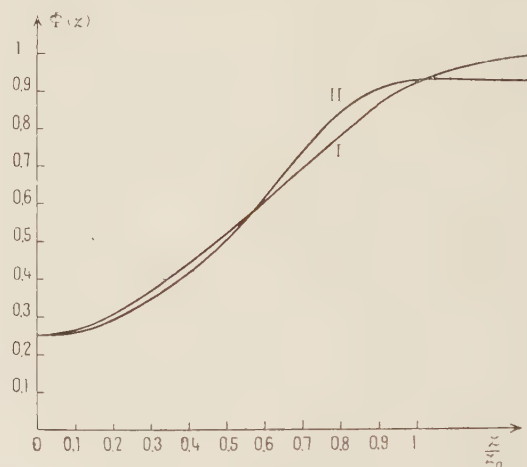


Fig. 11.

I, courbe calculée d'après la relation (27);
II, courbe calculée d'après les relations (32).

paux, etc.) en fonction de sa structure géométrique et électrique.

La fonction $\Phi(z)$ que nous avons établie [form. (12)] pour représenter le potentiel sur l'axe de la lentille, ne se prêtant pas, par suite de sa complexité, à l'intégration des équations de la trajectoire, nous allons la remplacer par des fonctions tangentes. Nous avons vu que le procédé le plus simple, dans cet ordre d'idées, consiste à remplacer la fonction (12) par trois paraboles se raccordant aux points $\zeta = \pm \frac{2}{3} z_0$.

La nouvelle courbe du potentiel que nous avons représentée dans la figure 11 pour le cas d'une lentille-objectif de microscope électronique, ne diffère de la courbe établie à partir de la relation (12) qu'au voisinage des points $z = \pm z_0$, c'est-à-dire là où la vitesse de l'électron est élevée et l'action du champ faible. L'erreur introduite ainsi dans l'équation de la trajectoire, sera, du reste, d'autant plus faible que $\Phi(z_0)$ sera plus voisin de V_2 , c'est-à-dire que le

rayon R_2 sera plus faible. En général, elle sera négligeable.

Les hypothèses formulées ci-dessus permettent d'aboutir à des formules d'une remarquable symétrie qui expriment directement les propriétés optiques fondamentales de la lentille en fonction de ses données géométriques et des tensions qui lui sont appliquées. Le cas du miroir se présente alors comme un prolongement naturel de la théorie établie pour la lentille, le paramètre fondamental $x = \frac{\Phi(0)}{\Phi(z_0)}$ changeant simplement de signe.

Nous remplacerons ensuite la courbe du potentiel par une quartique, ce qui nous permettra de parfaire la représentation du potentiel sur l'axe et d'aboutir à une équation différentielle qui exprime, d'une manière synthétique, les propriétés du système global lentille-miroir.

Toutefois, la complication de l'outil mathématique ne se traduit pas par une modification substantielle dans la nature des trajectoires électroniques, car — et c'est là le point important — ces approximations successives ne changent pas la valeur du potentiel au centre de la lentille qui détermine d'une manière essentielle ses caractéristiques optiques.

PREMIÈRE SECTION.

La lentille électrostatique indépendante.

Intégration des équations de la trajectoire.

Nous partirons pour commencer du potentiel défini par les relations

$$\begin{array}{ll} \text{Région d'incidence.....} & \Phi(z) = \Phi(z_0) - 2n(z + z_0)^2 \\ \text{» centrale.....} & \Phi(z) = \Phi(0) + nz^2 \\ \text{» d'émergence.....} & \Phi(z) = \Phi(z_0) - 2n(z - z_0)^2 \end{array}$$

avec

$$n = \frac{3}{2} \frac{\Phi(z_0) - \Phi(0)}{z_0^2}.$$

La décomposition de la lentille en trois régions, séparées par les points $\zeta = \pm \frac{2}{3} z_0$, correspond au changement de sens dans la concavité de la courbe du potentiel (concavité dirigée vers le haut dans la région centrale et vers le bas dans les régions d'incidence et d'émergence) et se traduit par des formes différentes pour l'équation de Gauss et l'allure de la trajectoire qui en résulte.

En coordonnées conventionnelles r, z , l'équation classique de la trajectoire dans le cadre de l'approximation de Gauss, s'écrit

$$(51) \quad 4\Phi(z) \frac{d^2 r}{dz^2} + 2\Phi'(z) \frac{dr}{dz} + \Phi''(z) r = 0.$$

Nous allons l'appliquer successivement aux trois régions.

a. RÉGION D'INCIDENCE. — On a

$$(52) \quad 4[\Phi(z_0) - 2n(z + z_0)^2] \frac{d^2 r}{dz^2} - 8n(z + z_0) \frac{dr}{dz} - 4nr = 0.$$

Posons $z + z_0 = \xi$ et divisons par $\Phi(z_0)$; on obtient

$$(53) \quad \left[1 - \frac{2n}{\Phi(z_0)} \xi^2\right] \frac{d^2 r}{d\xi^2} - \frac{2n}{\Phi(z_0)} \xi \frac{dr}{d\xi} - \frac{n}{\Phi(z_0)} r = 0.$$

Dans le cas de la lentille $\frac{n}{\Phi(z_0)}$ est partout positif.

Nous pouvons, par conséquent, poser

$$(54) \quad \frac{2n}{\Phi(z_0)} = \beta^2$$

et l'équation (53) devient

$$(55) \quad (1 - \beta^2 \xi^2) \frac{d^2 r}{d\xi^2} - \beta^2 \xi \frac{dr}{d\xi} - \frac{\beta^2}{2} r = 0.$$

Faisons maintenant le changement de variable

$$(56) \quad \beta \xi = \sin \beta u.$$

Avant de calculer les valeurs de $\frac{dr}{d\xi}$ et $\frac{d^2 r}{d\xi^2}$ en fonction de la nouvelle variable u , montrons que le changement de variable (56) est légitime. On a, en effet,

$$\begin{aligned} \beta \xi|_{\max} &= \left| \sqrt{\frac{2n}{\Phi(z_0)}} (z + z_0) \right|_{\max} \\ &= \left| \sqrt{3 \frac{\Phi(z_0) - \Phi(0)}{z_0^2 \Phi(z_0)}} (z + z_0) \right|_{\max} = \sqrt{3} \frac{2}{3} < 1. \end{aligned}$$

Les dérivées s'écrivent ensuite

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\xi} &= \frac{dr}{du} \frac{1}{\cos \beta u}, \\ \frac{d^2 r}{d\xi^2} &= \frac{d^2 r}{du^2} \frac{1}{\cos^2 \beta u} + \frac{dr}{du} \frac{\beta \sin \beta u}{\cos^3 \beta u} \end{aligned}$$

et l'équation (56) devient

$$\begin{aligned} (-\sin^2 \beta u + 1) \left(\frac{d^2 r}{du^2} \frac{1}{\cos^2 \beta u} + \frac{dr}{du} \frac{\beta \sin \beta u}{\cos^3 \beta u} \right) \\ - \beta \frac{\sin \beta u}{\cos \beta u} \frac{dr}{du} - \frac{\beta^2}{2} r = 0, \end{aligned}$$

soit

$$(57) \quad \frac{d^2 r}{du^2} - \frac{\beta^2}{2} r = 0.$$

La solution générale s'écrit

$$(58) \quad r = C_1 \operatorname{sh} \left(\frac{\beta}{\sqrt{2}} u + C_2 \right).$$

Dans la suite, nous considérerons les rayons initialement parallèles à l'axe. La constante C_2 est alors nulle et la relation (58) devient, en remplaçant u par sa valeur

$$(59) \quad r = r_0 \operatorname{ch} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \sin \beta (z + z_0) \right],$$

où r_0 représente la distance à l'axe initiale du rayon.

b. RÉGION CENTRALE. — L'équation de Gauss s'écrit ici :

$$(60) \quad 4[\Phi(0) + n z^2] \frac{d^2 r}{dz^2} + 4 n z \frac{dr}{dz} + 2 n r = 0$$

ou bien

$$(61) \quad \left[1 + \frac{n}{\Phi(0)} z^2 \right] \frac{d^2 r}{dz^2} + \frac{n}{\Phi(0)} z \frac{dr}{dz} + \frac{n}{2\Phi(0)} r = 0.$$

Comme précédemment, $\frac{n}{\Phi(0)}$ est toujours positif dans le cas de la lentille.

On peut, par conséquent, poser

$$(62) \quad \frac{n}{\Phi(0)} = \alpha^2,$$

les quantités α et β étant reliées par la relation

$$\frac{2}{\beta^2} - \frac{1}{\alpha^2} = \frac{\Phi(z_0) - \Phi(0)}{n},$$

soit

$$(63) \quad \frac{2}{\beta^2} - \frac{1}{\alpha^2} = \frac{2}{3} z_0^2.$$

L'équation (61) devient

$$(64) \quad (1 + \alpha^2 z^2) \frac{d^2 r}{dz^2} + \alpha^2 z \frac{dr}{dz} + \frac{\alpha^2}{2} r = 0.$$

Le changement de variable

$$(64) \quad \alpha z = \operatorname{sh} \alpha \xi,$$

toujours légitime, conduit aux relations

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dz} &= \frac{dr}{d\xi} \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha \xi}, \\ \frac{d^2 r}{dz^2} &= \frac{d^2 r}{d\xi^2} \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \alpha \xi} - \frac{dr}{d\xi} \frac{\alpha \operatorname{sh} \alpha \xi}{\operatorname{ch}^3 \alpha \xi}. \end{aligned}$$

L'équation différentielle (62) devient alors

$$\begin{aligned} (\operatorname{sh}^2 \alpha \xi + 1) \left(\frac{d^2 r}{d\xi^2} \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \alpha \xi} - \frac{dr}{d\xi} \frac{\alpha \operatorname{sh} \alpha \xi}{\operatorname{ch}^3 \alpha \xi} \right) \\ + \alpha \frac{\operatorname{sh} \alpha \xi}{\operatorname{ch} \alpha \xi} \frac{dr}{d\xi} + \frac{\alpha^2}{2} r = 0, \end{aligned}$$

soit

$$(66) \quad \frac{d^2 r}{d\xi^2} + \frac{\alpha^2}{2} r = 0$$

et la solution générale s'écrit

$$r = A \cos \left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}} \xi - \varphi \right)$$

ou bien

$$(67) \quad r = A \cos \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{sh} \alpha z - \varphi \right).$$

c. RÉGION D'ÉMERGENCE. — Il suffit de remplacer $z + z_0$ par $z - z_0$ dans les équations régissant la trajectoire de l'électron dans la région d'incidence. L'équation (58) donne alors directement la solution

$$(68) \quad r = B \operatorname{ch} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \sin \beta (z - z_0) - \psi \right].$$

En résumé, la trajectoire de Gauss est définie par le système de relations

$$(69) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Région d'incidence :} \\ r_1 = r_0 \operatorname{ch} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \sin \beta (z + z_0) \right], \\ \text{Région centrale :} \\ r_2 = A \cos \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{sh} \alpha z - \varphi \right], \\ \text{Région d'émergence :} \\ r_3 = B \operatorname{ch} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \sin \beta (z - z_0) - \psi \right]. \end{array} \right.$$

Détermination des coefficients.

Nous allons exprimer les coefficients qui figurent dans le système (69) en fonction du paramètre fondamental $x = \frac{\Phi(0)}{\Phi(z_0)}$.

On a d'abord

$$\alpha = \sqrt{\frac{n}{\Phi(0)}} = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{\Phi(z_0) - \Phi(0)}{z_0^2 \Phi(0)}},$$

soit

$$(70) \quad \alpha = \frac{1}{z_0} \sqrt{\frac{3}{2} \frac{1-x}{x}}.$$

De même

$$\beta = \sqrt{\frac{2n}{\Phi(z_0)}} = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{\Phi(z_0) - \Phi(0)}{z_0^2 \Phi(z_0)}},$$

c'est-à-dire

$$(71) \quad \beta = \frac{1}{z_0} \sqrt{\frac{3}{2} (1-x)}.$$

Posons encore

$$(72) \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{2}{3} \frac{1-x}{x}} = \alpha_0$$

et

$$(72) \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \sin \sqrt{\frac{1-x}{3}} = \beta_0.$$

La continuité de la trajectoire et de sa dérivée permettent ensuite de calculer les coefficients A, B, φ et ψ .

A titre d'exemple, nous allons développer le calcul pour A et φ .

Les deux relations

$$r_1 \left(\frac{2}{3} z_0 \right) = r_2 \left(\frac{2}{3} z_0 \right),$$

$$r'_1 \left(\frac{2}{3} z_0 \right) = r'_2 \left(\frac{2}{3} z_0 \right)$$

fournissent

$$(73_1) \quad r_0 \operatorname{ch} \beta_0 = A \cos(\alpha_0 + \varphi).$$

$$(73_2) \quad r_0 \operatorname{sh} \frac{\beta}{\sqrt{1 - \frac{\beta^2 z_0^2}{9}}} = A \sin(\alpha_0 + \varphi) \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \frac{4\alpha^2 z_0^2}{9}}}.$$

Calculons la quantité

$$\lambda = \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\frac{1 - \frac{\beta^2 z_0^2}{9}}{1 - \frac{4\alpha^2 z_0^2}{9}}}.$$

On a, en tenant compte de (70) et (71) :

$$(74) \quad \lambda = \sqrt{3(1-x)} \sqrt{\frac{2}{3} \frac{x}{1-x}} \sqrt{\frac{9}{9-3(1-x)}} \times \sqrt{\frac{9x+2\sqrt{3(1-x)}}{9x}} = \sqrt{2}.$$

Le système (73) devient alors

$$(73'_1) \quad r_0 \operatorname{ch} \beta_0 = A \cos(\alpha_0 + \varphi),$$

$$(73'_2) \quad \sqrt{2} r_0 \operatorname{sh} \beta_0 = A \sin(\alpha_0 + \varphi).$$

Il en résulte

$$A^2 = r_0^2 (\operatorname{ch}^2 \beta_0 + 2 \operatorname{sh}^2 \beta_0) \quad \text{et} \quad \operatorname{tg}(\alpha_0 + \varphi) = \sqrt{2} \operatorname{th} \beta_0.$$

Finalement,

$$(75) \quad \left[\begin{array}{l} A^2 = r_0^2 (1 + 3 \operatorname{sh}^2 \beta_0), \\ \varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{2} \operatorname{th} \beta_0 - \alpha_0. \end{array} \right]$$

Le calcul de B et ψ à partir des relations

$$r_2 \left(\frac{2}{3} z_0 \right) = r_3 \left(\frac{2}{3} z_0 \right), \quad r'_2 \left(\frac{2}{3} z_0 \right) = r'_3 \left(\frac{2}{3} z_0 \right)$$

est fait en appendice. Le résumé suivant condense les résultats.

Résumé des formules.

Les rayons principaux à l'intérieur de la lentille sont définis par

$$r_1 = r_0 \operatorname{ch} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \sin \beta(z + z_0) \right],$$

$$r_2 = A \cos \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{sh} x z - \varphi \right],$$

$$r_3 = B F' \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \sin \beta(z - z_0) - \psi \right],$$

avec

$$A^2 = r_0^2 (1 + 3 \operatorname{sh}^2 \beta_0),$$

$$\varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{2} \operatorname{th} \beta_0 - \alpha_0,$$

et, suivant les valeurs de $K = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg}(\alpha_0 - \varphi)$,

$$K < 1, \quad B^2 = A^2 \left[1 - \frac{3}{2} \sin^2(\alpha_0 - \varphi) \right],$$

$$\psi = \operatorname{arc} \operatorname{th} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg}(\alpha_0 - \varphi) - \beta_0,$$

$$F' = \operatorname{ch}, \quad K_1 > 1,$$

$$B^2 = A^2 \left[\frac{3}{2} \sin^2(\alpha_0 - \varphi) - 1 \right],$$

$$\psi = \operatorname{arc} \operatorname{th} \sqrt{2} \operatorname{cotg}(\alpha_0 - \varphi) - \beta_0,$$

$$F' = \operatorname{sh}.$$

$K = 1$:

$$r_3 = C e^{\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \sin \beta(z - z_0)}, \quad C = \pm \frac{A}{\sqrt{3}} e^{-\beta_0};$$

$K = -1$:

$$r_3 = C e^{-\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \sin \beta(z - z_0)}, \quad C = \pm \frac{A}{\sqrt{3}} e^{\beta_0}.$$

Dans ces formules :

$$z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{sh} \frac{2\alpha z_0}{3}, \quad \beta_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \sin \frac{\beta z_0}{3};$$

$$\alpha = \frac{1}{z_0} \sqrt{\frac{3}{2} \frac{1-x}{x}}, \quad \beta = \frac{1}{z_0} \sqrt{3(1-x)};$$

$$x = \frac{\Phi(0)}{\Phi(z_0)}.$$

Discussion des coefficients.

Nous supposons ici $0 < x < 1$, c'est-à-dire le système fonctionne « en lentille ». Dans le cas banal où $x = 1$ (électrodes portées au même potentiel), les formules établies ci-dessus montrent que l'équation de la trajectoire se réduit partout à $r = r_0$, comme il fallait s'y attendre. Le cas $x = 0$ sera envisagé dans la suite.

Nous supposons aussi r_0 positif, ce qui ne restreint évidemment pas la généralité des raisonnements.

1° DISCUSSION DE A ET φ . — La valeur de A en fonction de x est donnée par la relation explicite

$$(76) \quad A^2 = r_0^2 \left[1 + 3 \operatorname{sh}^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \sin \sqrt{\frac{1-x}{3}} \right) \right].$$

A est toujours positif, comme le montre la première des relations (73), compte tenu de (75). Le graphique 12 met en évidence la variation de $\frac{A}{r_0}$ en

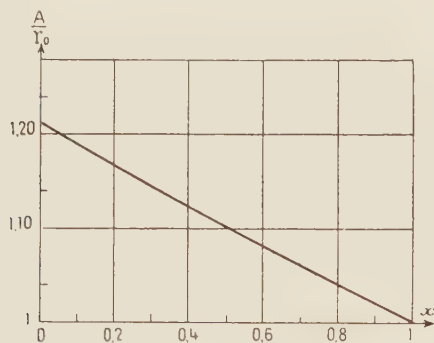


Fig. 12.

fonction de x . On voit que A croît de $A(1) = 0$ à

$$A(0) = r_0 \sqrt{1 + 3 \operatorname{sh}^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \sin \frac{1}{\sqrt{3}} \right)} = 1,267 r_0$$

lorsque x parcourt l'intervalle $(1,0)$.

Cherchons une expression de A pour les faibles valeurs de x . On démontre facilement que, dans ce cas :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \sin \sqrt{\frac{1-x}{3}} \cong \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \sin \sqrt{\frac{1}{3} - x}$$

et la formule (76) devient, en effectuant les calculs

$$(77) \quad \frac{A}{r_0} = 1,267 - 0,292x.$$

La valeur de φ en fonction de x est donnée par la deuxième des relations (75) que nous écrirons sous forme explicite :

$$(78) \quad \varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{2} \operatorname{th} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \sin \sqrt{\frac{1-x}{3}} \right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{2}{3} \frac{1-x}{x}}.$$

La figure 13 montre la variation de φ en fonction de x . Remarquons que φ est négatif dans tout l'intervalle $0 < x < 1$. Il est facile de montrer, en outre, que pour les faibles valeurs de x , la relation (78) peut être remplacée avec une bonne approximation par

$$(79) \quad \varphi = \frac{1}{2\sqrt{2}} \log_e x + 0,179$$

2° CAS OU $K = \pm 1$. — Déterminons les valeurs pour lesquelles $K = \pm 1$, c'est-à-dire cherchons les racines des deux équations

$$(80_1) \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{sh} \frac{2\alpha z_0}{3} - \varphi \right) = 1$$

et

$$(80_2) \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{sh} \frac{2\alpha z_0}{3} - \varphi \right) = -1.$$

En explicitant par rapport à x , ces équations s'écrivent

$$(81_1) \quad \sqrt{2} \operatorname{arc} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{2}{3} \left(\frac{1}{x} - 1 \right)} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{2} = n\pi \\ = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{2} \operatorname{th} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \sin \sqrt{\frac{1-x}{3}} \right),$$

$$(81_2) \quad \sqrt{2} \operatorname{arc} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{2}{3} \left(\frac{1}{x} - 1 \right)} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{2} = n\pi \\ = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{2} \operatorname{th} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \sin \sqrt{\frac{1-x}{3}} \right),$$

n étant un nombre entier positif, pouvant être nul dans (81₁). Ces équations transcendentes peuvent

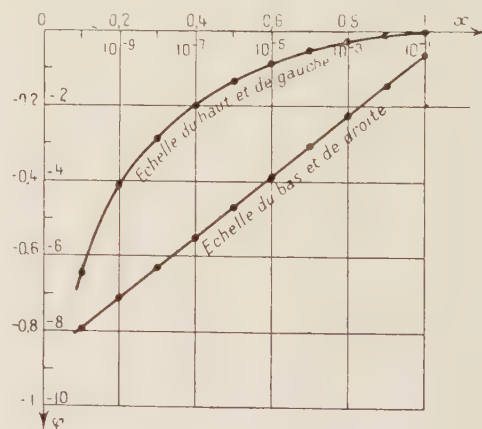


Fig. 13. — Variation de φ en fonction de x .

être résolues par un procédé numérique ou graphique convenable. On peut, toutefois, remarquer que, sauf pour la racine $x = \frac{1}{3}$ qu'on obtient en faisant $n = 0$ dans (81₁), les valeurs de x sont assez faibles pour que $\operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{2} \operatorname{th} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \sin \sqrt{\frac{1-x}{3}} \right)$ puisse être remplacé par $\operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{2} \operatorname{th} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \sin \sqrt{\frac{1}{3}} \right)$.

Les solutions s'écrivent alors

$$(82_1) \quad x = \frac{1}{1 + 1,5 \operatorname{sh}^2 \left(\frac{n\pi}{\sqrt{2}} + 1,048 \right)}$$

et

$$(8_2) \quad x = \frac{1}{1 + 1,5 \operatorname{sh}^2 \left(\frac{n\pi}{\sqrt{2}} - 0,304 \right)},$$

respectivement.

En effectuant les calculs, on trouve, pour les racines de la première équation,

$$n = 0 : \quad x_0 = \frac{1}{3};$$

[calculée directement à partir de (8₁)],

$$n = 1 : \quad x_1 = 3,83 \cdot 10^{-3};$$

$$n = 2 : \quad x_2 = 4,52 \cdot 10^{-5};$$

$$n = 3 : \quad x_3 = 5,27 \cdot 10^{-7};$$

$$n = 4 : \quad x_4 = 6,67 \cdot 10^{-9};$$

$$\dots\dots\dots$$

et pour celles de la deuxième :

$$n = 1 : \quad x_1 = 5,70 \cdot 10^{-2};$$

$$n = 2 : \quad x_2 = 6,77 \cdot 10^{-4};$$

$$n = 3 : \quad x_3 = 7,94 \cdot 10^{-6};$$

$$n = 4 : \quad x_4 = 9,42 \cdot 10^{-8};$$

$$\dots\dots\dots$$

Nous avons vu que lorsque $K = 1$, C est donné par

$$C = \pm \frac{\Lambda}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \sin \frac{2z_0}{3}}.$$

Il en résulte que pour

$$x = \frac{1}{3}, \quad C = \pm \frac{\Lambda}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \sin \frac{\sqrt{2}}{3}} = \pm 0,409 \Lambda.$$

Pour les autres racines de $K = 1$, C est sensiblement donné par

$$C = \pm \frac{\Lambda}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \sin \frac{1}{\sqrt{3}}} = \pm 0,373 \Lambda.$$

Lorsque $K = -1$, C est donné avec la même approximation par

$$C = \pm \frac{\Lambda}{\sqrt{3}} e^{\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \sin \frac{\Lambda}{\sqrt{3}}} = 0,894 \Lambda.$$

Quant au signe de C , il est facile de montrer que C est positif lorsque

$$\left(2n - \frac{1}{2} \right) \pi < \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{sh} \frac{2\alpha z_0}{3} - \varphi < \left(2n + \frac{1}{2} \right) \pi,$$

et négatif lorsque

$$\left(2n + \frac{1}{2} \right) \pi < \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{sh} \frac{2\alpha z_0}{3} - \varphi < \left(2n + \frac{3}{2} \right) \pi.$$

3° DISCUSSION DE B ET ψ DANS LE CAS GÉNÉRAL.

— La connaissance des racines des équations $K = \pm 1$ permet de fixer les intervalles à l'intérieur desquels

la trajectoire du rayon émergent est régie par un ch ou sh et de déterminer l'un ou l'autre groupe de formules applicables au calcul de B et ψ . On peut dresser ainsi le tableau suivant :

TABLEAU III.

$F = \operatorname{ch}$	$F = \operatorname{sh}$
$\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{3} < x < 5,70 \cdot 10^{-2}$
$5,70 \cdot 10^{-2} < x < 3,83 \cdot 10^{-3}$	$3,83 \cdot 10^{-3} < x < 6,77 \cdot 10^{-5}$
$6,77 \cdot 10^{-5} < x < 4,52 \cdot 10^{-7}$	$4,52 \cdot 10^{-7} < x < 7,94 \cdot 10^{-9}$
$7,94 \cdot 10^{-9} < x < 5,27 \cdot 10^{-7}$	$5,27 \cdot 10^{-7} < x < 9,42 \cdot 10^{-8}$
$\dots\dots\dots$	$\dots\dots\dots$

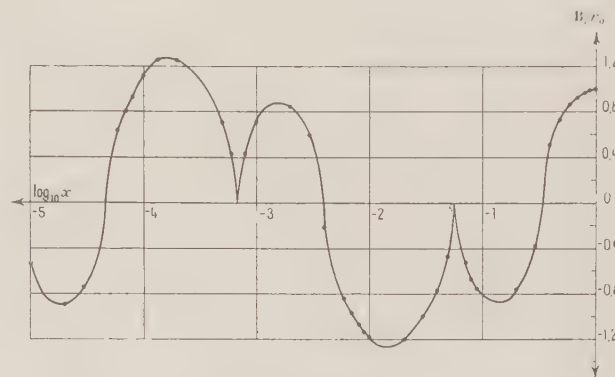


Fig. 14. — Variation de $\frac{B}{r_0}$ en fonction de x .

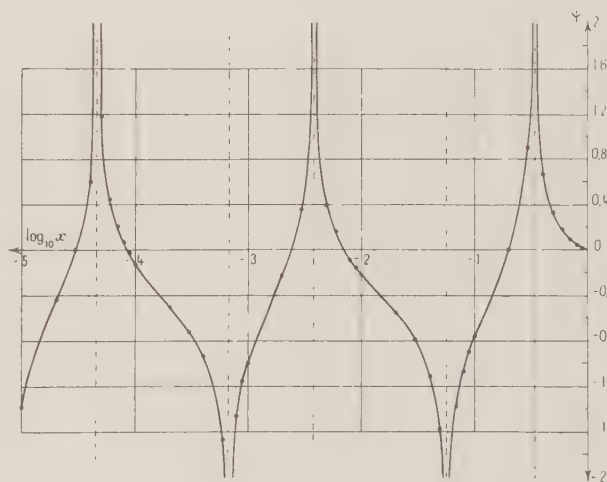


Fig. 15. — Variation de ψ en fonction de x .

Les valeurs de B et ψ en fonction de x , calculées d'après les formules explicites

$$(83) \quad B^2 = r_0^2 \left[1 + 3 \operatorname{sh}^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \sin \sqrt{\frac{1-x}{3}} \right) \right] \cdot \left| 1 - \frac{3}{2} \sin^2 F \right|,$$

$$(84) \quad \psi = \operatorname{arc} \operatorname{th} \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg}}{\sqrt{2} \cotg} (F) - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \sin \sqrt{\frac{1-x}{3}},$$

avec

$$X = \sqrt{2} \operatorname{arsh} \sqrt{\frac{2}{3} \left(\frac{1}{x} - 1 \right)} \\ - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{2} \operatorname{th} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \sin \sqrt{\frac{1-x}{3}} \right)$$

ont été représentées dans les figures 14 et 15. Pour faciliter le tracé, l'échelle logarithmique a été adoptée pour les abscisses. Il est facile de montrer que lorsque $|K| < 1$ ($F = \operatorname{ch}$) B est positif pour

$$\left(2n - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arsh} \frac{2\alpha z_0}{3} - \varphi < \left(2n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2}$$

et négatif pour

$$\left(2n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arsh} \frac{2\alpha z_0}{3} - \varphi < \left(2n + \frac{3}{2} \right) \frac{\pi}{2}.$$

Par contre, lorsque $|K| > 1$ ($F = \operatorname{sh}$), B est positif pour

$$(2n+1)\pi < \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arsh} \frac{2\alpha z_0}{3} - \varphi < (2n+2)\pi$$

et négatif pour

$$2n\pi < \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arsh} \frac{2\alpha z_0}{3} - \varphi < (2n+1)\pi.$$

On démontre aisément que pour les faibles valeurs de x les relations (83) et (84) s'écrivent

$$(85) \quad B^2 = r_0^2 (1,603 - 0,739x) \left| 1 - \frac{3}{2} \sin^2 X \right|,$$

$$(86) \quad \psi = \operatorname{arc} \operatorname{th} \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg}}{\sqrt{2} \cotg} (X) - 0,435,$$

$$\text{avec } X = 0,168 - \frac{1}{\sqrt{2}} \log_e x.$$

Marche des rayons principaux.

a. RÉGION D'INCIDENCE. — L'équation du rayon principal dans la région d'incidence

$$r_1 = r_0 \operatorname{ch} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \sin \beta(z + z_0) \right], \\ z_0 < z < -\frac{2}{3} z_0,$$

montre immédiatement que la trajectoire est représentée dans cette région par une branche de courbe ascendante quelle que soit la valeur particulière du paramètre x . En particulier, la courbe $r(z)$ ne saurait avoir de zéro dans cette région. Sa valeur maximum est évidemment atteinte pour $z = -\frac{2}{3} z_0$ et s'écrit

$$(87) \quad r_{1\max} = r_0 \operatorname{ch} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \sin \sqrt{\frac{1-x}{3}} \right].$$

On voit que $r_{1\max}$ peut varier entre r_0 pour $x=1$ et

$$r_0 \operatorname{ch} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \sin \frac{1}{\sqrt{3}} = 1,096 r_0 \quad \text{pour } x=0.$$

Cette constatation est fort importante car elle démontre bien l'inertie presque totale du rayon de Gauss dans la région d'incidence par rapport à une variation du paramètre x , c'est-à-dire une modification de la structure électrique ou géométrique de la lentille.

b. RÉGION CENTRALE. — L'expression de la trajectoire électronique s'écrit ici :

$$r_2 = A \cos \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{sh} \alpha z - \varphi \right), \\ -\frac{2}{3} z_0 < z < \frac{2}{3} z_0.$$

Puisque

$$r'_1 \left(-\frac{2}{3} z_0 \right) = r'_2 \left(-\frac{2}{3} z_0 \right),$$

il est clair que la courbe commencera dans cette région par une branche ascendante. Elle pourra ensuite, suivant la valeur particulière du paramètre x osciller une ou plusieurs fois autour de l'axe ou, au contraire, passer vers la région d'émergence sans avoir intercepté l'axe.

Les zéros de la fonction $r_2(z)$ sont donnés par

$$(88) \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{sh} \alpha z - \varphi = (2n+1) \frac{\pi}{2},$$

n étant un nombre entier, positif ou nul (on démontre aisément que n ne saurait être négatif).

En explicitant la relation (88) et en résolvant par rapport à z on obtient l'expression générale de l'abscisse du point d'intersection avec l'axe

$$(89) \quad z = z_0 \sqrt{\frac{2}{3} \frac{x}{1-x}} \\ \times \operatorname{sh} \left[\sqrt{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{2} \operatorname{th} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \sin \sqrt{\frac{1-x}{3}} \right) \right. \\ \left. - \operatorname{arc} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{2}{3} \frac{1-x}{x}} + (2n+1) \frac{\pi}{\sqrt{2}} \right].$$

Cherchons les valeurs de x pour lesquelles le rayon de Gauss coupe l'axe au point $z = \frac{2}{3} z_0$. Il faut, à cet effet, que

$$(90) \quad \operatorname{arc} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{2}{3} \frac{1-x}{x}} - (2n+1) \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \\ = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{2} \operatorname{th} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \sin \sqrt{\frac{1-x}{x}} \right).$$

Pour les faibles valeurs de x , la solution de cette équation transcendante s'écrit

$$(91) \quad x = \frac{1}{1 + 1,5 \operatorname{sh}^2(1,482 + 2,222 n)}.$$

Les racines de (91) sont, par conséquent,

$$n = 0 : \quad x_0 = 1,381 \cdot 10^{-1};$$

[calculée directement à partir de (90)].

$$n = 1 : \quad x_1 = 1,61 \cdot 10^{-1};$$

$$n = 2 : \quad x_2 = 1,89 \cdot 10^{-1};$$

$$n = 2 : \quad x_3 = 2,22 \cdot 10^{-1}.$$

On voit que pour $x > 13,81 \%$, il n'y a pas d'intersection dans la région centrale, pour $x < 13,81 \%$, le rayon peut couper une, deux, trois, ... fois l'axe, suivant la valeur de x .

Cherchons si le point d'intersection présente une abscisse limite lorsque x tend vers zéro. La relation (89) fournit

$$(92) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{z}{z_0} \right) = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{x}{1-x}} \times \operatorname{sh} \left(0,743 - \operatorname{arc sh} \sqrt{\frac{2}{3} \frac{1-x}{x}} + n\pi\sqrt{2} + 2,222 \right) \\ = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{x}{1-x}} \operatorname{sh} \left(2,965 + n\pi\sqrt{2} - \operatorname{arc sh} \sqrt{\frac{2}{3} \frac{1-x}{x}} \right) \\ = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{x}{1-x}} \left[\sqrt{\frac{2+x}{3x}} \times \operatorname{sh} (2,965 + n\pi\sqrt{2}) - \sqrt{\frac{2}{3} \frac{1-x}{x}} \times \operatorname{ch} (2,965 + n\pi\sqrt{2}) \right],$$

soit

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{z}{z_0} = \frac{2}{3} (\operatorname{sh} 2,965 - \operatorname{ch} 2,965) \times (\operatorname{ch} n\pi\sqrt{2} - \operatorname{sh} n\pi\sqrt{2});$$

pour $n = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{z}{z_0} = -0,035;$$

pour $n = 1, 2, 3, \dots$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{z}{z_0} = 0.$$

On voit que lorsque x tend vers zéro, l'abscisse du premier point d'intersection tend vers $-0,035 z_0$, l'abscisse du deuxième approche de zéro.

Les figures 16 et 17 donnent l'abscisse du point d'intersection du rayon de Gauss en fonction de x .

On peut montrer que pour les faibles valeurs de x , l'abscisse du point d'intersection varie linéairement en fonction de x . La formule (89) s'écrit, en effet, dans ce cas :

$$\frac{z}{z_0} = \sqrt{\frac{2}{9} \frac{2+x}{1+x}} \operatorname{sh} (2,965 + n\pi\sqrt{2}) - \frac{2}{3} \operatorname{ch} (2,965 + n\pi\sqrt{2}) \\ \cong \left(\frac{2}{3} + \frac{x}{2} \right) \operatorname{sh} (2,965 + n\pi\sqrt{2}) - \frac{2}{3} \operatorname{ch} (2,965 + n\pi\sqrt{2}),$$

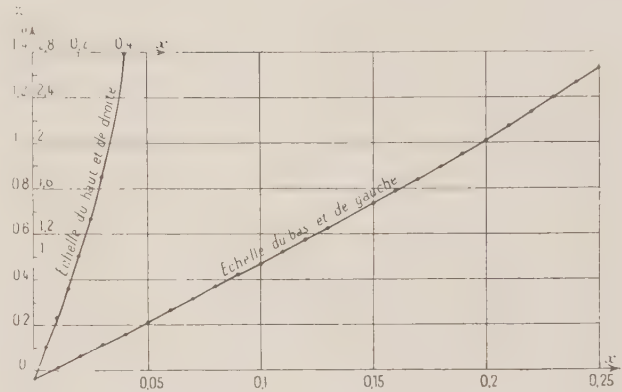


Fig. 16. — Abscisse de la première intersection en fonction de x .

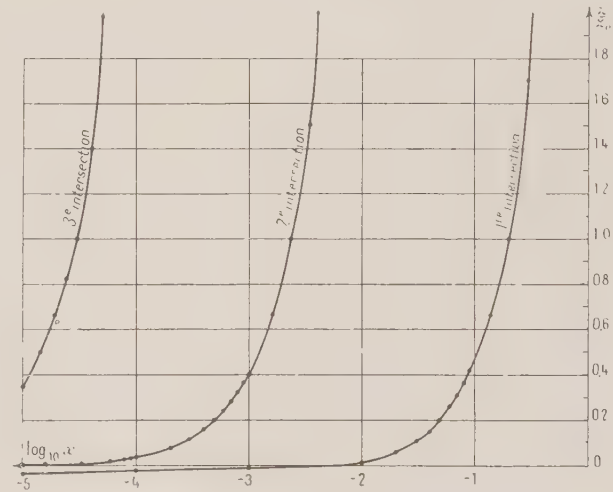


Fig. 17. — Abscisse du point d'intersection en fonction de x

soit

$$(93) \quad \frac{z}{z_0} \cong \frac{x}{4} e^{2,965 + n\pi\sqrt{2}} \quad n \geq 1.$$

Les maxima et minima du rayon de Gauss dans la région centrale sont donnés par

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc sh} \alpha z - \varphi = n\pi.$$

Il est à remarquer que tous les maxima et minima d'un même rayon sont égaux en valeur absolue. Leur valeur commune est

$$A = r_0 \sqrt{1 + 3 \operatorname{sh}^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \sin \sqrt{\frac{1-x}{3}} \right)}.$$

Pour les faibles valeurs de x , on peut utiliser la relation (77).

c. RÉGION D'ÉMERGENCE. — On a, dans cette région,

$$r_3 = B F \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \sin \beta(z - z_0) - \psi \right],$$

$$\frac{2}{3} z_0 < z < z_0.$$

Il en résulte immédiatement que si l'équation $r_3(z) = 0$ admet une solution dans la région considérée, elle est *unique* et donnée par

$$(94) \quad \operatorname{sh} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \sin \beta(z - z_0) - \psi \right] = 0,$$

soit

$$(95) \quad z = z_0 + \frac{1}{\beta} \sin \psi \sqrt{2}.$$

Encore faut-il que

$$\frac{2}{3} z_0 \leq z_0 + \frac{1}{\beta} \sin \psi \sqrt{2} \leq z_0.$$

L'équation

$$\frac{2}{3} z_0 = z_0 + \frac{1}{\beta} \sin \psi \sqrt{2}$$

conduit à

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{sh} \frac{2 \alpha z_0}{3} - \varphi = (2n + 1) \frac{\pi}{2},$$

dont nous avons déjà étudié les racines. D'autre part, $z_0 + \frac{1}{\beta} \sin \psi \sqrt{2} = z_0$ s'écrit, en accord avec (94) $\psi = 0$, soit

$$(96) \quad \operatorname{arc} \operatorname{th} \sqrt{2} \cotg X - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \sin \sqrt{\frac{1-x}{3}} = 0,$$

X ayant la valeur indiquée pour les équations (83) et (84).

Les racines de cette équation sont :

$$x_1 = 1,99,10^{-1},$$

$$x_2 = 2,31,10^{-2},$$

$$x_3 = 2,92,10^{-3},$$

$$\dots\dots\dots$$

Pour ces valeurs de x , le rayon émergent coupe l'axe au point $z = z_0$, c'est-à-dire dans le plan de sortie de la lentille.

Les zéros de la fonction $z = z_0$, calculés d'après (96), ont été présentés dans les figures 16 et 17.

On démontre aisément que dans le cas particulier $K = \pm 1$, il n'y a pas d'intersection dans la région d'émergence.

d. RÉGION EXTÉRIEURE A LA LENTILLE $z > z_0$. — Dans cette région, l'équation différentielle de la trajectoire s'écrit

$$(97) \quad r'' = 0,$$

et fournit pour solution, en tenant compte des conditions à l'émergence,

$$(98) \quad r = B [F'(z_0)(z - z_0) + F(z_0)].$$

Les zéros de la fonction $r(z)$ sont donnés ici par

$$(99) \quad z = z_0 - \frac{F(z_0)}{F'(z_0)},$$

soit, en effectuant les calculs :

$$(100) \quad \frac{z}{z_0} = 1 + \sqrt{\frac{2}{3(1-x)}} \frac{\cotg \psi}{\operatorname{th} \psi}.$$

Les valeurs ainsi calculées ont été portées dans les figures 16 et 17.

Considérons, pour finir, les deux cas $K = -1$ et $K = +1$.

On démontre facilement que pour $K = -1$, il n'y a pas d'intersection dans la région extérieure à la lentille. Pour $K = +1$, la relation (100) devient

$$\frac{z}{z_0} = 1 + \sqrt{\frac{2}{3(1-x)}}.$$

Nous avons vu que $K = 1$ correspond à

$$x = \frac{1}{3}, \quad x = 3,83,10^{-2}, \quad x = 4,52,10^{-3}, \quad \dots$$

Pour $x = \frac{1}{3}$, on a $\frac{z}{z_0} = 2$. Pour les autres racines de $K = 1$, les intersections sont très sensiblement données par

$$\frac{z}{z_0} = 1 + \sqrt{\frac{2}{3}} = 1,867.$$

Le tableau IV résume l'étude des zéros de la fonction $r(z)$, c'est-à-dire des intersections du rayon de Gauss avec l'axe.

Calcul effectif des lentilles. Tracé des trajectoires.

Les tableaux V et VI donnent quelques exemples de calcul de lentilles.

TABLEAU IV.

x .	Zéros de $r(z)$. Intersections du rayon de Gauss avec l'axe.				
1.....	Une intersection à l'infini				} Une intersection
1,99 .10 ⁻¹	»	»	au point $z = z_0$		
1,381.10 ⁻¹	»	»	»	$z = \frac{2}{3} z_0$	
7,1 .10 ⁻³	»	»	»	$z = 0$	
7,014.10 ⁻³	{ Une intersection à l'infini				} Deux intersections
	{ Deuxième intersection au point $z = 0,008 z_0$				
2,31 .10 ⁻³	{ Une intersection au point $z = z_0$				
	{ Deuxième intersection au point $z = 0,06 z_0$				
1,61 .10 ⁻³	{ Une intersection au point $z = \frac{2}{3} z_0$				
	{ Deuxième intersection au point $z = 0,072 z_0$				
8,51 .10 ⁻⁵	{ Une intersection à l'infini				} Trois intersections
	{ Deuxième intersection au point $z = 0,035 z_0$				
	{ Troisième » » $z = -0,022 z_0$				
2,92. 10 ⁻⁵	{ Une intersection au point $z = z_0$				
	{ Deuxième intersection au point $z = 0,012 z_0$				
	{ Troisième » » $z = -0,03 z_0$				
1,89 .10 ⁻⁹	{ Une intersection au point $z = \frac{2}{3} z_0$				
	{ Deuxième intersection au point $z = 0,01 z_0$				
	{ Troisième » » $z = -0,031 z_0$				
	etc.				

TABLEAU V. — Calcul de la lentille $x = 0,10$.

$$x = \frac{3,674}{z_0}, \quad \beta = \frac{1,643}{z_0}, \quad \frac{A}{r_0} = 1,238, \quad \varphi = -0,650, \quad \frac{B}{r_0} = -0,802, \quad \psi = -0,754.$$

$$\text{Région d'incidence : } \frac{r}{r_0} = \text{ch} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin 1,643 \left(1 + \frac{z}{z_0} \right) \right].$$

$$\begin{aligned} \frac{z}{z_0} = -1 & \dots\dots\dots \frac{r}{r_0} = 1 \\ \frac{z}{z_0} = -0,9 & \dots\dots\dots \frac{r}{r_0} = \text{ch} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin 0,164 \right) = \text{ch } 0,118 = 1,007 \\ \frac{z}{z_0} = -0,8 & \dots\dots\dots \frac{r}{r_0} = \text{ch} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin 0,329 \right) = \text{ch } 0,238 = 1,028 \\ \frac{z}{z_0} = -\frac{2}{3} & \dots\dots\dots \frac{r}{r_0} = \text{ch} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin 0,548 \right) = \text{ch } 0,410 = 1,085 \end{aligned}$$

$$\text{Région centrale : } \frac{r}{r_0} = 1,238 \cos \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \text{arc sh } 3,674 \frac{z}{z_0} + 0,650 \right).$$

$$\begin{aligned} \frac{z}{z_0} = -\frac{2}{3} & \dots\dots\dots \frac{r}{r_0} = 1,238 \cos \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \text{arc sh } 2,449 + 0,650 \right) = 1,238 \cos(-1,151 + 0,650) = 1,085 \\ \frac{z}{z_0} = -0,6 & \dots\dots\dots \frac{r}{r_0} = 1,238 \cos \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \text{arc sh } 2,205 + 0,650 \right) = 1,238 \cos(-1,080 + 0,650) = 1,123 \\ \frac{z}{z_0} = -0,5 & \dots\dots\dots \frac{r}{r_0} = 1,238 \cos \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \text{arc sh } 1,835 + 0,650 \right) = 1,238 \cos(-0,966 + 0,650) = 1,172 \\ \frac{z}{z_0} = -0,4 & \dots\dots\dots \frac{r}{r_0} = 1,238 \cos \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \text{arc sh } 1,470 + 0,650 \right) = 1,238 \cos(-0,835 + 0,650) = 1,216 \end{aligned}$$

TABLEAU V (*suite*).

$\frac{z}{z_0} = -0,3 \dots \dots \dots$	$\frac{r}{r_0} = 1,238 \cos \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc sh} 1,102 + 0,650 \right) = 1,238 \cos(-0,672 + 0,650) = 1,235$
$\frac{z}{z_0} = -0,2 \dots \dots \dots$	$\frac{r}{r_0} = 1,238 \cos \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc sh} 0,735 + 0,650 \right) = 1,238 \cos(-0,481 + 0,650) = 1,220$
$\frac{z}{z_0} = -0,1 \dots \dots \dots$	$\frac{r}{r_0} = 1,238 \cos \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc sh} 0,367 + 0,650 \right) = 1,238 \cos(-0,254 + 0,650) = 1,140$
$\frac{z}{z_0} = 0 \dots \dots \dots$	$\frac{r}{r_0} = 1,238 \cos 0,650 = 0,985$
$\frac{z}{z_0} = 0,1 \dots \dots \dots$	$\frac{r}{r_0} = 1,238 \cos 0,904 = 0,765$
$\frac{z}{z_0} = 0,2 \dots \dots \dots$	$\frac{r}{r_0} = 1,238 \cos 1,131 = 0,527$
$\frac{z}{z_0} = 0,3 \dots \dots \dots$	$\frac{r}{r_0} = 1,238 \cos 1,322 = 0,304$
$\frac{z}{z_0} = 0,4 \dots \dots \dots$	$\frac{r}{r_0} = 1,238 \cos 1,485 = 0,105$
$\frac{z}{z_0} = 0,5 \dots \dots \dots$	$\frac{r}{r_0} = 1,238 \cos 1,616 = -0,056$
$\frac{z}{z_0} = 0,6 \dots \dots \dots$	$\frac{r}{r_0} = 1,238 \cos 1,730 = -0,196$
$\frac{z}{z_0} = \frac{2}{3} \dots \dots \dots$	$\frac{r}{r_0} = 1,238 \cos 1,801 = -0,282$

Région d'émergence : $\frac{r}{r_0} = -0,802 \operatorname{sh} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc sin} 1,643 \left(\frac{z}{z_0} - 1 \right) + 0,754 \right]$.

$\frac{z}{z_0} = \frac{2}{3} \dots \dots \dots$	$\frac{r}{r_0} = -0,802 \operatorname{sh} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc sin} 0,548 + 0,754 \right) = -0,802 \operatorname{sh}(-0,410 + 0,754) = -0,282$
$\frac{z}{z_0} = 0,8 \dots \dots \dots$	$\frac{r}{r_0} = -0,802 \operatorname{sh} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc sin} 0,329 + 0,754 \right) = -0,802 \operatorname{sh}(-0,238 + 0,754) = -0,431$
$\frac{z}{z_0} = 0,9 \dots \dots \dots$	$\frac{r}{r_0} = -0,802 \operatorname{sh} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc sin} 0,164 + 0,754 \right) = -0,802 \operatorname{sh}(-0,118 + 0,754) = -0,544$
$\frac{z}{z_0} = 1 \dots \dots \dots$	$\frac{r}{r_0} = -0,802 \operatorname{sh} 0,754 = -0,664$

TABLEAU VI. — *Calcul de la lentille $x = 10^{-3}$.*

$$\alpha = \frac{38,71}{z_0}, \quad \beta = \frac{1,731}{z_0}, \quad \frac{\Lambda}{r_0} = 1,266, \quad \varphi = -2,259, \quad \frac{B}{r_0} = 0,738, \quad \psi = -0,965.$$

Région d'incidence : $\frac{r}{r_0} = \operatorname{ch} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc sin} 1,731 \left(1 + \frac{z}{z_0} \right) \right]$.

$\frac{z}{z_0} = -1 \dots \dots \dots$	$\frac{r}{r_0} = 1$
$\frac{z}{z_0} = -0,9 \dots \dots \dots$	$\frac{r}{r_0} = \operatorname{ch} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc sin} 0,173 \right) = \operatorname{ch} 0,123 = 1,008$
$\frac{z}{z_0} = -0,8 \dots \dots \dots$	$\frac{r}{r_0} = \operatorname{ch} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc sin} 0,346 \right) = \operatorname{ch} 0,250 = 1,031$
$\frac{z}{z_0} = -\frac{2}{3} \dots \dots \dots$	$\frac{r}{r_0} = \operatorname{ch} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc sin} 0,577 \right) = \operatorname{ch} 0,435 = 1,096$

TABLEAU VI (suite).

Région centrale : $\frac{r}{r_0} = 1,266 \cos \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc sh} 38,71 \frac{z}{z_0} + 2,259 \right)$.

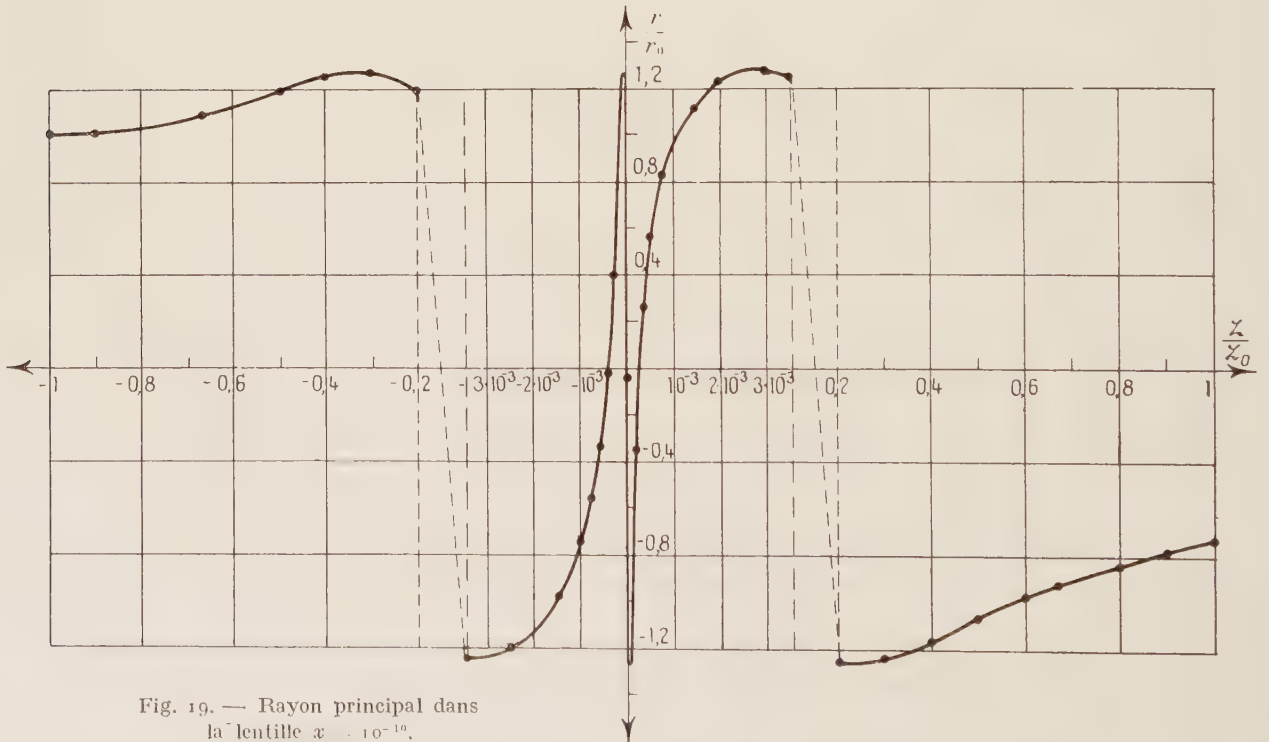
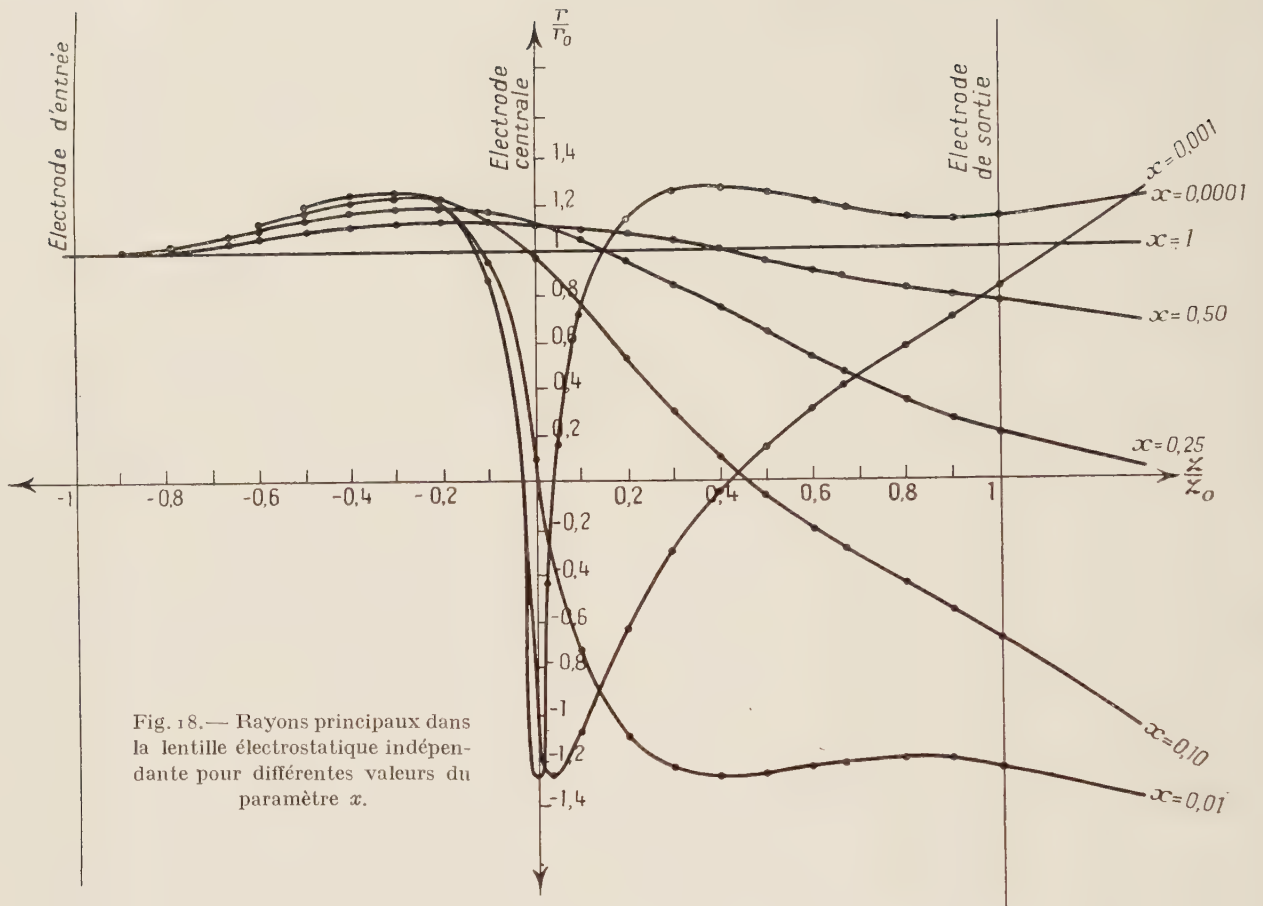
$\frac{z}{z_0} = -\frac{2}{3} \dots \dots \dots$	$\frac{r}{r_0} = 1,266 \cos \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc sh} 25,807 + 2,259 \right) = 1,266 \cos(-2,785 + 2,259) = 1,096$
$\frac{z}{z_0} = -0,6 \dots \dots \dots$	$\frac{r}{r_0} = 1,266 \cos \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc sh} 23,2 + 2,259 \right) = 1,266 \cos(-2,710 + 2,259) = 1,139$
$\frac{z}{z_0} = -0,5 \dots \dots \dots$	$\frac{r}{r_0} = 1,266 \cos \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc sh} 19,35 + 2,259 \right) = 1,266 \cos(-2,580 + 2,259) = 1,200$
$\frac{z}{z_0} = -0,4 \dots \dots \dots$	$\frac{r}{r_0} = 1,266 \cos \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc sh} 15,48 + 2,259 \right) = 1,266 \cos(-2,420 + 2,259) = 1,250$
$\frac{z}{z_0} = -0,3 \dots \dots \dots$	$\frac{r}{r_0} = 1,266 \cos \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc sh} 11,6 + 2,259 \right) = 1,266 \cos(-2,220 + 2,259) = 1,263$
$\frac{z}{z_0} = -0,2 \dots \dots \dots$	$\frac{r}{r_0} = 1,266 \cos \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc sh} 7,42 + 2,259 \right) = 1,266 \cos(-1,930 + 2,259) = 1,198$
$\frac{z}{z_0} = -0,1 \dots \dots \dots$	$\frac{r}{r_0} = 1,266 \cos \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc sh} 3,871 + 2,259 \right) = 1,266 \cos(-1,460 + 2,259) = 0,883$
$\frac{z}{z_0} = 0 \dots \dots \dots$	$\frac{r}{r_0} = 1,266 \cos 2,259 = -1,266 \cos 0,883 = -0,804$
$\frac{z}{z_0} = 0,1 \dots \dots \dots$	$\frac{r}{r_0} = 1,266 \cos 3,719 = -1,266 \cos 0,577 = -1,060$
$\frac{z}{z_0} = 0,2 \dots \dots \dots$	$\frac{r}{r_0} = 1,266 \cos 4,189 = -1,266 \cos 1,047 = -0,631$
$\frac{z}{z_0} = 0,3 \dots \dots \dots$	$\frac{r}{r_0} = 1,266 \cos 4,479 = -1,266 \cos 1,337 = -0,291$
$\frac{z}{z_0} = 0,4 \dots \dots \dots$	$\frac{r}{r_0} = 1,266 \cos 4,679 = -1,266 \cos 1,537 = -0,042$
$\frac{z}{z_0} = 0,5 \dots \dots \dots$	$\frac{r}{r_0} = 1,266 \cos 4,839 = -1,266 \cos 1,747 = -0,158$
$\frac{z}{z_0} = 0,6 \dots \dots \dots$	$\frac{r}{r_0} = 1,266 \cos 4,969 = -1,266 \cos 1,915 = -0,320$
$\frac{z}{z_0} = \frac{2}{3} \dots \dots \dots$	$\frac{r}{r_0} = 1,266 \cos 5,044 = -1,266 \cos 1,240 = -0,411$

Région d'émergence : $\frac{r}{r_0} = 0,738 \operatorname{sh} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc sin} 1,731 \left(\frac{z}{z_0} - 1 \right) + 0,965 \right]$.

$\frac{z}{z_0} = \frac{2}{3} \dots \dots \dots$	$\frac{r}{r_0} = 0,738 \operatorname{sh} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc sh} 0,577 + 0,965 \right) = 0,738 \operatorname{sh}(-0,435 + 0,965) = 0,411$
$\frac{z}{z_0} = 0,8 \dots \dots \dots$	$\frac{r}{r_0} = 0,738 \operatorname{sh} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc sh} 0,346 + 0,965 \right) = 0,738 \operatorname{sh}(-0,280 + 0,965) = 0,573$
$\frac{z}{z_0} = 0,9 \dots \dots \dots$	$\frac{r}{r_0} = 0,738 \operatorname{sh} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc sh} 0,173 + 0,965 \right) = 0,738 \operatorname{sh}(-0,123 + 0,965) = 0,696$
$\frac{z}{z_0} = 1 \dots \dots \dots$	$\frac{r}{r_0} = 0,738 \operatorname{sh} 0,965 = 0,828$

Les figures 18 et 19 montrent les rayons principaux, calculés d'après la théorie précédente pour un certain nombre de lentilles. L'accord entre les trajectoires ainsi calculées et celles établies à partir

de mesures à la cuve et d'intégrations numériques [1] est très satisfaisant dans tout le domaine exploré par l'expérience. Par contre, la méthode exposée a l'avantage d'être extrêmement rapide et semble la



seule applicable dans la région des faibles valeurs de $\Phi(0)$, où les mesures à la cuve deviennent vite impraticables.

Étude des distances focales.

La distance focale de la lentille est donnée par

$$(101) \quad f = \frac{r_0}{\left(\frac{dr}{dz}\right)_{z=z_0}}.$$

Nous allons considérer les trois cas :

a. $|K| < 1$. — Le rayon à la sortie de la lentille est donné par

$$r = B \operatorname{ch} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \beta(z - z_0) - \psi \right],$$

d'où

$$(102) \quad \left(\frac{dr}{dz}\right)_{z=z_0} = \frac{-B\beta}{\sqrt{2}} \operatorname{sh} \psi \quad \text{et} \quad f = \frac{r_0 \sqrt{2}}{B\beta \operatorname{sh} \psi}.$$

Explicitons cette formule. On a

$$B = r_0 \sqrt{1 + 3 \operatorname{sh}^2 \beta_0} \sqrt{1 - \frac{3}{2} \sin^2(2\alpha_0 - \arctg \sqrt{2} \operatorname{th} \beta_0)}$$

et

$$\psi = \arctg \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg}(2\alpha_0 - \arctg \sqrt{2} \operatorname{th} \beta_0) - \beta_0.$$

Il en résulte

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} \psi &= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg}(\quad)}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2(\quad)}} \operatorname{ch} \beta_0 - \frac{\operatorname{sh} \beta_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2(\quad)}} \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\quad) \operatorname{ch} \beta_0 - \cos(\quad) \operatorname{sh} \beta_0}{\sqrt{1 - \frac{3}{2} \sin^2(\quad)}}, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} B \operatorname{sh} \psi &= r_0 \sqrt{1 + 3 \operatorname{ch}^2 \beta_0} \\ &\times \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \sin(2\alpha_0 - \arctg \sqrt{2} \operatorname{th} \beta_0) \operatorname{ch} \beta_0 \right. \\ &\quad \left. - \cos(2\alpha_0 - \arctg \sqrt{2} \operatorname{th} \beta_0) \operatorname{sh} \beta_0 \right]. \end{aligned}$$

Or,

$$\sin(2\alpha_0 - \arctg \sqrt{2} \operatorname{th} \beta_0) = \frac{\sin 2\alpha_0 - \sqrt{2} \cos 2\alpha_0 \operatorname{th} \beta_0}{\sqrt{1 + 2 \operatorname{th}^2 \beta_0}}$$

et

$$\cos(2\alpha_0 - \arctg \sqrt{2} \operatorname{th} \beta_0) = \frac{\cos 2\alpha_0 + \sqrt{2} \sin 2\alpha_0 \operatorname{th} \beta_0}{\sqrt{1 + 2 \operatorname{th}^2 \beta_0}}.$$

Il vient, par conséquent,

$$B \operatorname{sh} \psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2\alpha_0 (1 - \operatorname{sh}^2 \beta_0) - \operatorname{sh} 2\beta_0 \cos 2\alpha_0.$$

Des transformations faisant appel aux propriétés élémentaires des fonctions trigonométriques et hyperboliques montrent alors que l'expression du pouvoir convergent peut être mise sous la forme

$$(103) \quad \left| \frac{1}{f} = \beta \left(\frac{3}{2} \operatorname{ch}^2 \beta_0 - 1 \right) \right. \\ \left. < \sin \left(2\alpha_0 - \arctg \frac{2\sqrt{2} \operatorname{th} \beta_0}{1 - 2 \operatorname{th}^2 \beta_0} \right) \right|,$$

qui met bien en évidence son caractère oscillatoire.

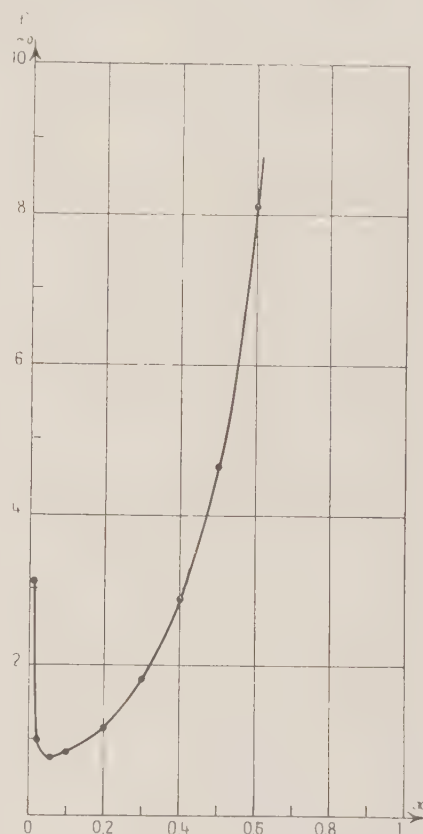


Fig. 20. — Distance focale en fonction de x .

b. $|K| > 1$. — Le rayon à la sortie de la lentille s'écrit

$$r = B \operatorname{sh} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \beta(z - z_0) - \psi \right],$$

d'où

$$\left(\frac{dr}{dz}\right)_{z=z_0} = \frac{B\beta \operatorname{ch} \psi}{\sqrt{2}}.$$

Il en résulte, pour la distance focale,

$$(104) \quad f = -\frac{r_0 \sqrt{2}}{B\beta \operatorname{ch} \psi}.$$

En remplaçant B et ψ par

$$B = r_0 \sqrt{1 + 3 \operatorname{sh}^2 \beta_0} \sqrt{\frac{3}{2} \sin^2 (2\alpha_0 - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{2} \operatorname{th} \beta_0) - 1},$$

$$\psi = \operatorname{arc} \operatorname{th} \sqrt{2} \cot (2\alpha_0 - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{2} \operatorname{th} \beta_0) - \beta_0,$$

et en effectuant les opérations comme précédemment, on retrouve la formule (103).

c. $|K| = 1$. — Dans ce cas, ψ tend vers l'infini et B vers zéro. Les formes $B \operatorname{sh} \psi$ et $B \operatorname{ch} \psi$ deviennent indéterminées. On peut lever l'indétermination par un procédé quelconque, par exemple à l'aide des calculs effectués en a et b.

La formule (103) donne donc, dans tous les cas, la distance focale.

La figure 20 montre la variation de la distance focale pour $1 > x > 0,01$.

Remarquons que la branche droite de la courbe correspond à celle que nous avons trouvée dans le cas des convergences moyennes et faibles (fig. 9).

La formule (103) ou la figure 20 permettent de tracer le réseau des courbes

$$f = f(R_1), \quad f = f(z_0), \quad f = f(R_2), \quad f = f\left(\frac{V_1}{V_2}\right),$$

qu'on obtient en maintenant constant l'un des paramètres mentionnés et en faisant varier les autres. L'avantage de l'introduction du paramètre $x = \frac{\Phi(z_0)}{\Phi(z_0)}$ est de synthétiser toutes ces courbes en une seule.

La figure 20 montre que la distance focale passe par un minimum dont les coordonnées peuvent être déterminées par le calcul

$$f_{\min} = 0,77 z_0 \quad \text{pour } x = 5,8 \cdot 10^{-2}.$$

On vérifie facilement que pour les faibles valeurs de x , la relation (103) prend la forme

$$(105) \quad \frac{1}{f} = -\frac{1,39}{z_0} \sin \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \log_e x + 0,355 \right)$$

ou bien

$$(106) \quad \frac{f}{z_0} = -\frac{0,72}{\sin \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \log_e x + 0,355 \right)}.$$

En particulier, la distance focale est minimum (pouvoir convergent maximum) pour

$$(107) \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \log_e x + 0,355 = (n+1) \frac{\pi}{2}.$$

Les racines de cette équation sont :

$$\begin{aligned} x_0 &= 5,8 \cdot 10^{-2}, \\ x_1 &= 7,6 \cdot 10^{-3}, \\ x_2 &= 8,96 \cdot 10^{-6}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Avec les hypothèses faites en départ (point d'inflexion de la courbe du potentiel donné par $\zeta = \frac{2}{3} z_0$), la distance focale minimum de la lentille électrostatique indépendante est $0,72 z_0$, le premier minimum étant $0,77 z_0$.

Le pouvoir convergent est nul (distance focale infinie) pour

$$(108) \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \log_e x + 0,355 = n\pi,$$

c'est-à-dire pour

$$\begin{aligned} x &= 1, \\ x &= 7,11 \cdot 10^{-3}, \\ x &= 8,20 \cdot 10^{-6}, \\ x &= 9,73 \cdot 10^{-7}, \\ &\dots \end{aligned}$$

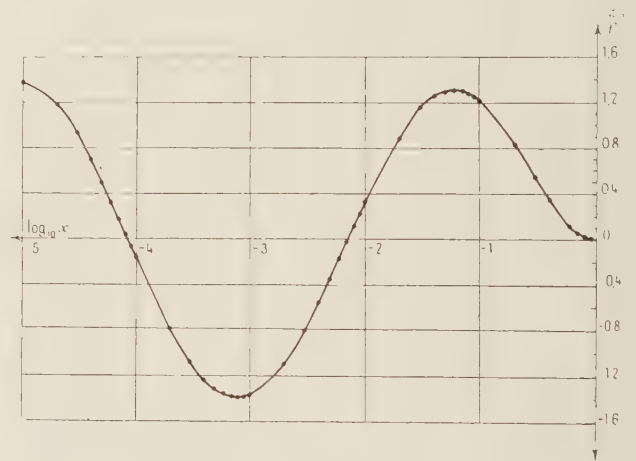


Fig. 21. — Pouvoir de convergence en fonction de x .

La figure 21 montre la variation du pouvoir de convergence en fonction de x .

Abscisse du foyer.

La tangente au rayon à la sortie de la lentille s'écrit

$$(109) \quad r - r(z_0) = \left(\frac{dr}{dz} \right)_{z=z_0} (z - z_0).$$

Il en résulte, pour l'abscisse du foyer,

$$(110) \quad z_F = z_0 - \left(\frac{r}{\frac{dr}{dz}} \right)_{z=z_0},$$

soit

$$(111) \quad z_F = z_0 + \frac{\sqrt{2} \operatorname{cotgh} \psi}{\beta \operatorname{th} \psi}.$$

Dans cette relation, le symbole supérieur est à

prendre lorsque $|K| < 1$, le symbole inférieur lorsque $|K| > 1$.

On vérifie, en comparant avec (100), qu'à l'extérieur de la lentille, l'abscisse du foyer coïncide avec

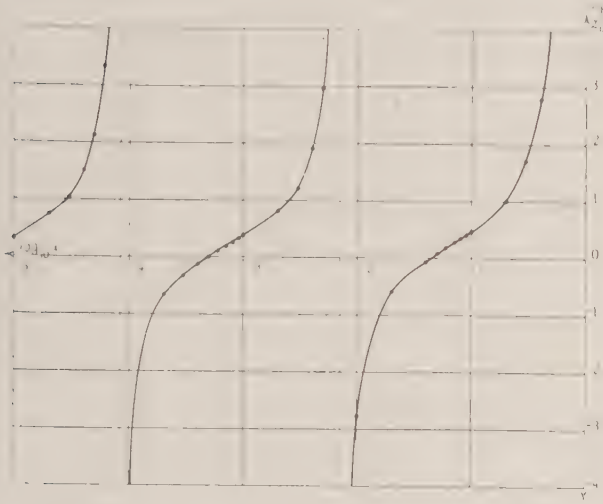


Fig. 22. — Position du foyer en fonction de x .

l'intersection du rayon avec l'axe. Calculons $\cotgh \psi$ pour $|K| < 1$. On a

$$\begin{aligned} \cotgh \psi &= \cotgh \left[\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg}(2\alpha_0 - \operatorname{arctg} \sqrt{2} \operatorname{th} \beta_0) - \beta_0 \right] \\ &= \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg}(\dots) \operatorname{th} \beta_0}{\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg}(\dots) - \operatorname{th} \beta_0} \\ &= \frac{\sqrt{2} - \operatorname{th} \beta_0 \operatorname{tg} 2\alpha_0 - \sqrt{2} \operatorname{th} \beta_0}{1 + \sqrt{2} \operatorname{tg} 2\alpha_0 \operatorname{th} \beta_0} \\ &= \frac{\operatorname{tg} 2\alpha_0 - \sqrt{2} \operatorname{th} \beta_0}{1 + \sqrt{2} \operatorname{tg} 2\alpha_0 \operatorname{th} \beta_0} - \sqrt{2} \operatorname{th} \beta_0 \\ &= \frac{\sqrt{2}(1 + \operatorname{th}^2 \beta_0) + \operatorname{tg} 2\alpha_0 \operatorname{th} \beta_0}{\operatorname{tg} 2\alpha_0 - 2\sqrt{2} \operatorname{th} \beta_0 - 2 \operatorname{th}^2 \beta_0 \operatorname{tg} 2\alpha_0} \\ &= \frac{\sqrt{2} \cos 2\alpha_0 \operatorname{ch} 2\beta_0 + \frac{1}{2} \sin 2\alpha_0 \operatorname{sh} 2\beta_0}{\sin 2\alpha_0 (1 - \operatorname{sh}^2 \beta_0) - \sqrt{2} \cos 2\alpha_0 \operatorname{sh} 2\beta_0} \end{aligned}$$

Le calcul de $\operatorname{th} \psi$ pour $|K| > 1$ fournit la même expression. Dans tous les cas, l'abscisse du foyer est donc donnée par

$$(112) \quad \frac{z_F}{z_0} = 1 + \frac{1}{\sqrt{6(1-x)}} \frac{\sqrt{9 \operatorname{ch}^2 2\beta_0 - 1} \sin(2\alpha_0 + \operatorname{arctg} 2\sqrt{2} \operatorname{coth} 2\beta_0)}{3 \operatorname{ch}^2 \beta_0 - 2 \sin(2\alpha_0 - \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{2} \operatorname{th} \beta_0}{1 - 2 \operatorname{th}^2 \beta_0})}$$

On vérifie aisément que pour les faibles valeurs de x , cette relation prend la forme

$$(113) \quad \frac{z_F}{z_0} = 1 + 0,761 \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \log_e x - 0,887\right)}{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \log_e x + 0,355\right)}$$

En particulier, le foyer est rejeté à l'infini pour

$$\begin{aligned} x &= 1, \\ x &= 7,11 \cdot 10^{-3}, \\ x &= 8,20 \cdot 10^{-5}, \\ x &= 9,73 \cdot 10^{-7}, \\ &\dots \end{aligned}$$

La figure 22 montre la variation de l'abscisse du foyer en fonction de x .

Position du plan principal.

L'abscisse du plan principal image est donnée par

$$(114) \quad z_P = z_F - f.$$

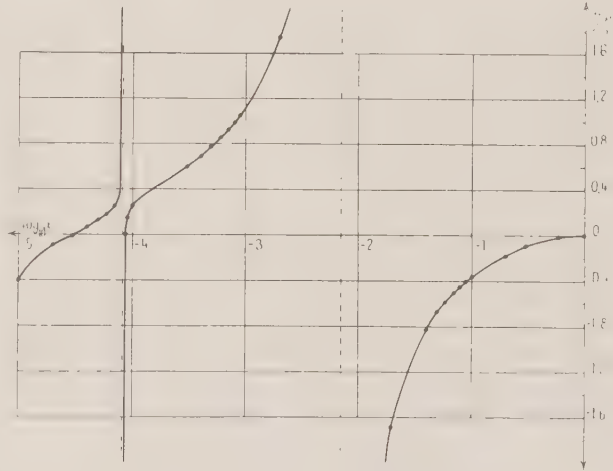


Fig. 23. — Position du plan principal en fonction de x .

Il résulte des calculs précédents que le plan principal est défini dans le cas général par

$$(115) \quad \frac{z_P}{z_0} = 1 + \frac{1}{\sqrt{6(1-x)}} \frac{\sqrt{9 \operatorname{ch}^2 \beta_0 - 1} \sin(2\alpha_0 + \operatorname{arctg} 2\sqrt{2} \operatorname{coth} 2\beta_0) - 2\sqrt{2}}{3 \operatorname{ch}^2 \beta_0 - 2 \sin(2\alpha_0 - \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{2} \operatorname{th} \beta_0}{1 - 2 \operatorname{th}^2 \beta_0})}$$

et pour les faibles valeurs de x par

$$(116) \quad \frac{z_p}{z_0} = 1 + \frac{0,764 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \log_e x - 0,887\right) + 0,72}{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \log_e x + 0,355\right)}.$$

La position du plan principal en fonction de x est représentée dans la figure 23.

Remarques au sujet des éléments cardinaux de la lentille.

Les formules établies précédemment permettent de déterminer dans tous les cas la distance focale, l'abscisse du foyer et la position des plans principaux de la lentille. Toutefois, l'utilisation de ces notions, dérivées de l'Optique classique, semble parfois pénible dans le cas de trajectoires présentant plusieurs oscillations autour de l'axe. Il semble alors plus logique et plus conforme à la réalité physique de faire intervenir les intersections des rayons avec l'axe qui, seules, ont une existence réelle (Tableau IV).

Des images obtenues à l'aide de rayons à oscillations multiples ont déjà été présentées en France et en Allemagne. Leur netteté sera d'autant plus grande que x sera plus stable. C'est de cette remarque que résulte l'intérêt de la mise en œuvre de générateurs H. T. à haute stabilité en Microscopie électrostatique.

Applications.

La théorie précédente donne directement les caractéristiques optiques de la lentille en fonction du paramètre x , c'est-à-dire en fonction de ses dimensions et des tensions qui lui sont appliquées. Nous allons l'appliquer à quelques problèmes pratiques qu'on rencontre en Microscopie électronique.

1° PROJET D'UN OBJECTIF DE MICROSCOPE ÉLECTROSTATIQUE. — Pour obtenir une distance focale assez courte et pouvoir placer tout de même l'objet en dehors du champ, nous prendrons $\frac{f}{z_0} = 1,2$. La figure 20 fournit alors $x = 0,21$. Nous supposons le montage bipolaire, c'est-à-dire la pièce centrale de la lentille reliée à la cathode; dans ces conditions, on peut appliquer la relation (24)

$$x_0 = \frac{1}{1 + \frac{z_0}{R_1} \operatorname{arctg} \frac{z_0}{R_1} - \frac{R_2}{2R_1}}.$$

En supposant $\frac{R_2}{R_1} = \frac{1}{2}$, on trouve $\frac{z_0}{R_1} = 3,16$. Si z_0 est de 4,75 mm (ce qui laisse une distance nette entre électrodes de 3,5 mm environ, nécessaire pour des raisons de rigidité électrique), le rayon du trou de la pièce centrale sera $R_1 = 1,5$ mm. On a donc

$$2R_1 = 3 \text{ mm}, \quad 2R_2 = 1,5 \text{ mm}, \quad z_0 = 4,75 \text{ mm},$$

la distance focale sera $f = 1,2 \times 4,75 = 5,7$ mm. L'objectif est ainsi entièrement déterminé.

2° RÉDUCTION DES ABERRATIONS D'ELLIPTICITÉ DE L'OBJECTIF ÉLECTROSTATIQUE. — Les travaux de F. Bertein [16] et W. Glaser [17] ont montré l'influence considérable des aberrations d'ellipticité sur le pouvoir séparateur du microscope électronique. On sait ainsi que les performances du microscope sont conditionnées d'une manière essentielle par la valeur de l'ellipticité ΔR_1 qui intervient dans l'expression du pouvoir résolvant.

Or, il est clair qu'en augmentant le rayon R_1 on réduira la valeur de l'ellipticité relative. En effet, ΔR_1 reste sensiblement constant et imposé par les possibilités mécaniques d'usinage (par exemple $\Delta R_1 = 0,005$ mm).

Proposons-nous alors de diminuer, dans un rapport de 2, les aberrations d'ellipticité de l'objectif étudié au 1°. Il nous faut prendre $2R_1 = 6$ mm. Pour maintenir, d'autre part, la distance focale constante, il nous faut maintenir constant le rapport $x = \frac{\Phi(0)}{\Phi(z_0)}$, nous allons donc agir sur le rapport des tensions de manière qu'on ait toujours [voir relation (23)] :

$$\frac{V_1 + (V_2 - V_1) \frac{1}{1 + \frac{z_0}{R_1} \operatorname{arctg} \frac{z_0}{R_1}}}{V_1 + (V_2 - V_1) \left[1 - \frac{\frac{R_2}{2R_1}}{1 + \frac{z_0}{R_1} \operatorname{arctg} \frac{z_0}{R_1}} \right]} = 0,21.$$

Pour

$$R_1 = 3 \text{ mm}, \quad R_2 = 1,5 \text{ mm}, \quad z_0 = 4,75 \text{ mm},$$

on trouve

$$\frac{V_1}{V_2} = -0,33.$$

Si notre objectif fonctionne sous une tension de service de 40 000 V, il faudra, pour réduire l'aberration d'ellipticité dans un rapport de 2, appliquer 53 233 V à l'électrode centrale de l'objectif. La réalisation pratique se fera à l'aide d'un montage potentiométrique (fig. 23). Le rapport des résistances du potentiomètre sera alors réglé une fois pour

toutes et la distance focale de la lentille restera invariable quelle que soit la tension de service.

Si les branches du potentiomètre sont rigoureusement non inductives et non capacitives, la stabilité

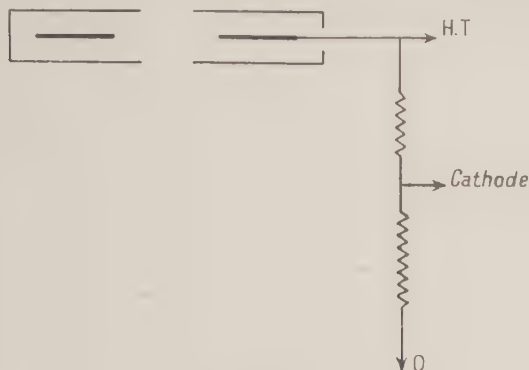


Fig. 24.

de tension requise pour le montage précédent est la même que pour le microscope ordinaire. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi et appelons C_c la constante d'aberration chromatique, α le demi-angle d'ouverture et ρ la tache d'aberration ramenée au plan-objet. On a

$$(117) \quad \rho = \alpha C_c \frac{V_1}{V_2} \left(\frac{\Delta V_1}{V_1} - \frac{\Delta V_2}{V_2} \right).$$

Pour

$$\rho = 1 \text{ m}\mu, \quad C_c = 25 \text{ mm}, \quad \frac{V_1}{V_2} = 0,33,$$

on trouve

$$\frac{\Delta V_1}{V_1} - \frac{\Delta V_2}{V_2} = \frac{1}{1000}.$$

On pourra diminuer de beaucoup la sévérité de la condition de stabilité en travaillant avec des ouvertures plus faibles ou, de préférence, en plaçant un circuit d'accord dans le schéma indiqué précédemment.

Remarquons pour finir qu'une réduction dans un rapport de 2 des aberrations d'ellipticité de l'objectif électrostatique actuel est tout à fait comparable avec les résultats qu'on peut obtenir à l'aide de systèmes correcteurs basés sur d'autres principes [18].

3° MICROSCOPE A HAUTE TENSION. — Posons-nous maintenant le problème inverse, c'est-à-dire essayons de combiner un canon fonctionnant sous haute tension avec un objectif travaillant à tension plus basse. Il est évident qu'en diminuant en même temps le diamètre du trou et la valeur absolue de la tension appliquée à l'électrode centrale, on pourra encore réaliser des distances focales relativement courtes. Précisons de manière quantitative ces notions.

A cet effet, résolvons l'équation (23) par rapport à $\frac{z_0}{R_1} \arctg \frac{z_0}{R_1}$; on obtient

$$(118) \quad \frac{z_0}{R_1} \arctg \frac{z_0}{R_1} = \frac{x-1+x\left(1+\frac{V_1}{V_2}\right)\frac{R_2}{2R_1}}{\frac{V_1}{V_2}+x}.$$

Cette relation montre que le rapport maximum de réduction des tensions est $\frac{V_1}{V_2} = x$. Pratiquement, il faut prendre des valeurs un peu plus faibles car $\frac{V_1}{V_2} = x$ donnerait $R_1 = 0$. A titre d'application numérique, prenons $x = 0,26$, ce qui correspond à $\frac{f}{z_0} = 1,50$ (fig. 20). La relation (118) est alors satisfaite pour $\frac{z_0}{R_1} = 14$, $\frac{R_2}{R_1} = \frac{1}{2}$, $\frac{V_1}{V_2} = 0,20$. On peut prendre $2R_1 = 2 \text{ mm}$, $z_0 = 14 \text{ mm}$. Pour une tension de service de 400 kV, l'objectif sera alimenté à 320 kV tout en bénéficiant d'une pénétration de 400 kV. La distance focale sera de 21 mm.

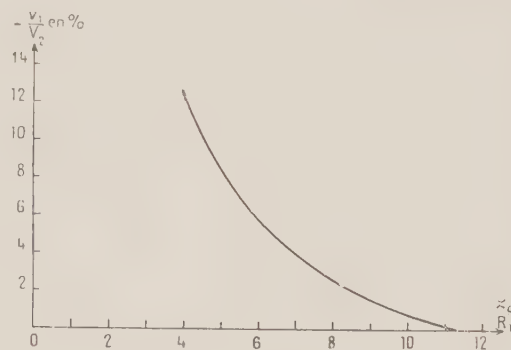


Fig. 25.

4° RÉDUCTION DES ABERRATIONS DE DISTORSION DE LA LENTILLE DE PROJECTION. — On sait que les performances de la lentille de projection sont limitées par les aberrations de distorsion. Ces aberrations sont proportionnelles à la distance focale de la lentille et passent par un minimum en même temps que f . La courbe des distances focales (fig. 20) nous permet donc de déterminer le point de fonctionnement optimum : $x = 5,8 \cdot 10^{-2}$, $f = 0,77 z_0$. Lorsque $x > 5,8 \cdot 10^{-2}$ (branche droite de la courbe), la distorsion est « en croissant », lorsque $10^{-2} < x < 5,8 \cdot 10^{-2}$ la distorsion est « en barillet ». La condition $x = 5,8 \cdot 10^{-2}$ s'écrit

$$\frac{f_1 + \frac{f_2 - f_1}{1 + \frac{z_0}{R_1} \arctg \frac{z_0}{R_1}}}{V_1 + (V_2 - V_1) \left[1 - \frac{\frac{R_2}{2R_1}}{1 + \frac{z_0}{R_1} \arctg \frac{z_0}{R_1}} \right]} = 5,8 \cdot 10^{-2}.$$

Posons $\frac{R_2}{R_1} = \frac{1}{2}$ et résolvons par rapport à $\frac{V_1}{V_2}$.

On trouve

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{0,066 \frac{z_0}{R_1} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{z_0}{R_1} - 0,951}{\frac{z_0}{R_1} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{z_0}{R_1} - 0,017}.$$

On peut maintenant calculer, en fonction du para-

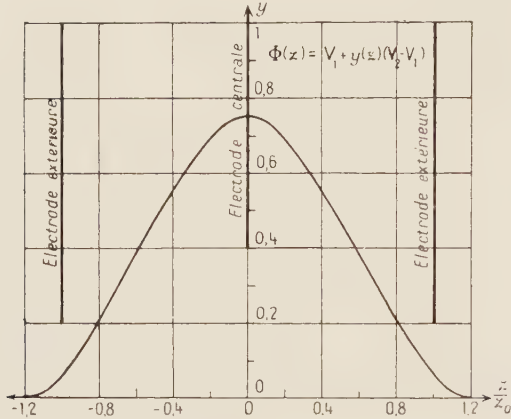


Fig. 26. — Lentille à électrode centrale positive. Distribution du potentiel.

mètre $\frac{z_0}{R_1}$ la valeur du rapport $\frac{V_1}{V_2}$, qui rend la distorsion minimum.

TABLEAU VII.

$\frac{z_0}{R_1}$	$\frac{V_1}{V_2} (\%)$	$\frac{z_0}{R_1}$	$\frac{V_1}{V_2} (\%)$
11,4.....	0	7.....	— 3,9
10.....	— 0,8	6.....	— 5,7
9.....	— 1,6	5.....	— 8,4
8.....	— 2,6	4.....	— 12,5

La figure 26 traduit graphiquement ces résultats. Considérons une lentille de projection usuelle ($\frac{z_0}{R_1} \cong 5$) insérée dans un microscope dont la tension de service est de 50 000 V. Il suffira d'appliquer 54 360 V à l'électrode centrale de la lentille de projection pour éliminer la distorsion. Ce résultat a été contrôlé expérimentalement.

L'étude précédente met en évidence la propriété remarquable qu'il est possible de construire une lentille de projection exempte de distorsion et fonctionnant en montage bipolaire (tension de la lentille = tension de service). Il faut, à cet effet, $\frac{z_0}{R_1} = 11,4$ (pour $\frac{R_2}{R_1} = 0,5$), ce qui conduit à une distance focale de $f = 0,77 z_0$. Une lentille de caracté-

ristiques $2R_1 = 1,5$ mm, $z_0 = 8,55$ mm, $f = 6,58$ mm répond à ces conditions.

Rappelons une fois de plus que tous ces résultats s'appliquent aux lentilles à électrodes minces.

Étude des lentilles $x > 1$.

Nous avons considéré, jusqu'à présent, les lentilles dont l'électrode centrale était portée à un potentiel inférieur ou égal au potentiel des électrodes extérieures. Pour ces lentilles, $x \leq 1$. Nous allons envisager maintenant le cas des lentilles dont l'électrode centrale est positive par rapport aux électrodes extérieures. Dans ce cas on a évidemment

$$x = \frac{\Phi(0)}{\Phi(z_0)} > 1.$$

Les formules de la répartition du potentiel sur l'axe établies dans la première partie restent évidemment valables, puisque nous n'avons fait aucune hypothèse particulière concernant V_1 et V_2 . La figure 27 montre un exemple de répartition du

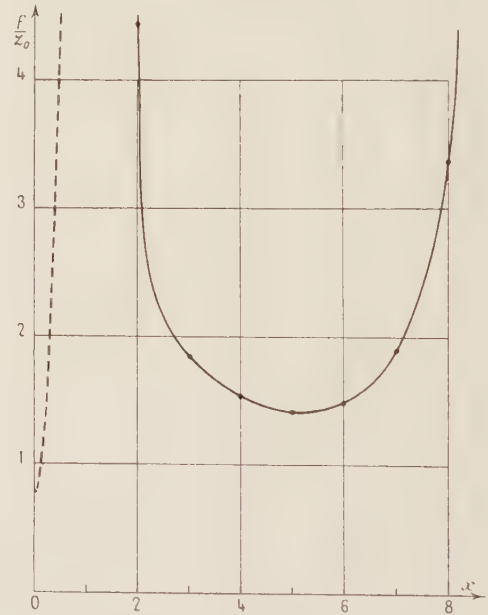


Fig. 27. — Variation de la distance focale pour les lentilles $x > 1$.

potentiel pour une lentille où l'électrode centrale est positive. On constate que la concavité de la courbe du potentiel est inversée par rapport à la lentille $x < 1$. On peut donc s'attendre à ce que les trajectoires électroniques aient une allure en quelque sorte symétrique par rapport à celles de la lentille classique.

Nous représenterons encore le potentiel sur l'axe par les formules :

$$\begin{aligned} \text{Région d'incidence.....} & \Phi(z) = \Phi(z_0) - 2n(z + z_0)^2 \\ \text{» centrale.....} & \Phi(z) = \Phi(0) + nz^2 \\ \text{» d'émergence.....} & \Phi(z) = \Phi(z_0) - 2n(z - z_0)^2 \end{aligned}$$

avec

$$n = \frac{3}{2} \frac{\Phi(z_0) - \Phi(0)}{z_0^2} < 0,$$

et appliquerons l'équation différentielle de la trajectoire de Gauss :

$$4\Phi(z) \frac{d^2 r}{dz^2} + 2\Phi'(z) \frac{dr}{dz} + \Phi''(z)r = 0$$

successivement aux trois régions :

a. RÉGION D'INCIDENCE :

$$4[\Phi(z_0) - 2n(z + z_0)^2] \frac{d^2 r}{dz^2} - 8n(z + z_0) \frac{dr}{dz} - 4nr = 0.$$

Posons

$$(119) \quad z + z_0 = \xi \quad \text{et} \quad -\frac{2n}{\Phi(z_0)} = \beta_1^2.$$

Il vient

$$(1 + \beta_1^2 \xi^2) \frac{d^2 r}{d\xi^2} + \beta_1^2 \xi \frac{dr}{d\xi} + \frac{\beta_1^2}{2} r = 0.$$

Le changement de variable $\beta_1 \xi = \text{sh } \beta_1 u$ fournit

$$\frac{d^2 r}{du^2} + \frac{\beta_1^2}{2} r = 0$$

et la solution s'écrit, en tenant compte des conditions initiales $[r(-z_0) = r_0 \text{ et } (\frac{dr}{dz})_{z=-z_0} = 0]$,

$$r_1 = r_0 \cos \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \text{arc sh } \beta(z + z_0) \right].$$

b. RÉGION CENTRALE. — L'équation différentielle de la trajectoire est

$$4[\Phi(0) + nz^2] \frac{d^2 r}{dz^2} + 4nz \frac{dr}{dz} + 2nr = 0$$

ou bien, en posant

$$(120) \quad \frac{n}{\Phi(0)} = -\alpha_1^2,$$

$$(1 - \alpha_1^2 z^2) \frac{d^2 r}{dz^2} - \alpha_1^2 z \frac{dr}{dz} - \frac{\alpha_1^2}{2} r = 0.$$

Le changement de variable $\alpha_1 z = \sin \alpha_1 u$ est légitime, car on a

$$\begin{aligned} |\alpha_1 z|_{\text{max}} &= \left| \sqrt{\frac{n}{\Phi(0)}} z \right| \\ &= \left| \sqrt{-\frac{3}{2} \frac{\Phi(z_0) - \Phi(0)}{z_0^2 \Phi(0)}} z \right|_{\text{max}} = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{2}{3}} < 1. \end{aligned}$$

L'équation différentielle s'écrit

$$\frac{d^2 r}{du^2} + \frac{\alpha_1^2}{2} r = 0$$

et fournit comme solution

$$r_2 = A \frac{\text{ch}}{\text{sh}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \text{arc sin } \alpha_1 z - \varphi \right).$$

c. RÉGION D'ÉMERGENCE. — Les calculs sont analogues à ceux effectués en a. On trouve

$$r_3 = B \cos \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \text{arc sh } \beta_1(z - z_0) - \psi \right].$$

En résumé, on a

$$(121) \quad \begin{cases} r_1 = r_0 \cos \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \text{arc sh } \beta_1(z + z_0) \right], \\ r_2 = A \frac{\text{ch}}{\text{sh}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \text{arc sin } \alpha_1 z - \varphi \right], \\ r_3 = B \cos \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \text{arc sh } \beta_1(z - z_0) - \psi \right]. \end{cases}$$

Les relations (119) et (120) permettent de calculer α_1 et β_1 en fonction de $x = \frac{\Phi(0)}{\Phi(z_0)}$.

On a

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \sqrt{\frac{-2n}{\Phi(z_0)}} = \sqrt{-3 \frac{\Phi(z_0) - \Phi(0)}{z_0^2 \Phi(z_0)}} = \frac{1}{z_0} \sqrt{3(x-1)}, \\ \alpha_1 &= \sqrt{\frac{-n}{\Phi(0)}} = \sqrt{-\frac{3}{2} \frac{\Phi(z_0) - \Phi(0)}{z_0^2 \Phi(0)}} = \frac{1}{z_0} \sqrt{\frac{3}{2} \frac{x-1}{x}}. \end{aligned}$$

On voit qu'entre les anciennes quantités α et β et les nouvelles valeurs α_1 et β_1 , on a les relations simples :

$$(122) \quad \alpha_1 = i\alpha, \quad \beta_1 = i\beta,$$

où $i = \sqrt{-1}$. Les formules (122) associées aux identités :

$$(123) \quad \text{sh } iu = i \sin u, \quad \text{ch } iu = \cos u$$

montrent qu'on peut obtenir les équations de la trajectoire de Gauss dans le cas $x > 1$ en remplaçant simplement α par $i\alpha$, β par $i\beta$ et z par iz dans les équations établies pour le cas $x < 1$. En d'autres termes, si $r = r(\alpha, \beta, z)$ est l'équation du rayon de Gauss pour $x < 1$, l'équation du rayon de Gauss dans la lentille $x > 1$ s'écrit $r = r(i\alpha, i\beta, iz)$.

Cette propriété permet de trouver la distance focale sans aucun calcul. On a immédiatement, d'après la relation (103) :

$$(124) \quad \begin{aligned} \frac{1}{f} &= -\beta_1 \left(\frac{3}{2} \cos^2 \beta_{10} - 1 \right) \\ &\times \text{sh} \left(2\alpha_{10} - \text{arc th } \frac{2\sqrt{2} \lg \beta_{10}}{1 + 2 \lg^2 \beta_{10}} \right), \end{aligned}$$

avec

$$(124) \quad \begin{cases} \alpha_{10} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \sqrt{\frac{2}{3} \frac{x-1}{x}}, \\ \beta_{10} = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arcsinh} \sqrt{\frac{x-1}{3}}. \end{cases}$$

La figure 26 montre la variation de la distance focale des lentilles à électrode centrale positive dans le domaine $1 < x < 9$. On voit que dans ce domaine, il est plus difficile d'obtenir de courtes distances focales que lorsque $x < 1$ (il n'en est plus de même pour des valeurs plus fortes de x , par exemple de l'ordre de 10 ou supérieures). Par contre, la courbe révèle l'existence d'une région où $\frac{df}{dz}$ est très faible ou nul; il est plus facile de réaliser des lentilles anastigmatiques (ou tout au moins très peu sensibles à la variation des paramètres électriques ou géométriques) lorsque $x > 1$ que lorsque $x < 1$ [19].

Quant à la trajectoire effective de l'électron, il est facile de voir qu'elle aura une allure oscillatoire dans les zones d'incidence et d'émergence et un régime exponentiel dans la zone centrale. Le nombre des oscillations sera évidemment d'autant plus grand que x sera plus élevé.

Le passage vers le miroir.

Lorsque x devient nul, l'équation que nous avons écrite pour le rayon de Gauss dans la région centrale de la lentille [deuxième équation du système (69)] n'est plus valable, puisque α devient indéterminé. Il faut alors remonter à l'équation (51) qui s'écrit avec

$$(125) \quad \begin{aligned} \Phi_1(z) &= n z^2 \\ 4 n z^2 r'' + 4 n z r' + 2 n r &= 0, \end{aligned}$$

soit

$$z^2 r'' + z r' + \frac{r}{2} = 0,$$

équation différentielle de Cauchy, dont la solution est

$$(126) \quad r = A \cos \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \log_e z, z - \bar{z} \right).$$

On voit, qu'avant d'atteindre le centre de la lentille, le rayon oscillera indéfiniment autour de l'axe. En d'autres termes, le rayon de Gauss n'aura pas d'existence réelle pour $x = 0$. Cela tient à ce que le champ tangent au champ réel ne peut plus être regardé comme sphérique au point $\Phi'(z) = 0$, mais présente une configuration conique [4].

DEUXIÈME SECTION.

Étude du miroir.

Généralités.

Nous avons considéré, jusqu'à présent, le cas $x \geq 0$ et nous avons étudié en détail le cas $0 \leq x \leq 1$, le plus important du point de vue pratique. Nous allons envisager maintenant le cas $x < 0$, c'est-à-dire [puisque $\Phi(z_0) > 0$] $\Phi(0) < 0$.

Nous avons vu dans la première Partie que la condition nécessaire et suffisante pour que la lentille fonctionne en miroir dans le cadre de l'approximation de Gauss est

$$\Phi(0) \leq 0$$

et nous avons déterminé les relations qui doivent

exister entre les différents paramètres électriques et géométriques pour que cette condition soit satisfaite.

Nous allons procéder maintenant à l'étude des trajectoires électroniques dans le miroir et à la détermination de ses caractéristiques optiques.

Intégration des équations de la trajectoire.

Le potentiel sur l'axe sera toujours représenté par les formules (32) qui deviennent ici :

Région d'incidence et d'émergence :

$$(1271) \quad \Phi(z) = \Phi(z_0) - 2n(z + z_0)^2;$$

Région centrale :

$$(1272) \quad \Phi(z) = \Phi(0) + n z^2;$$

avec

$$n = \frac{3}{2} \frac{\Phi(z_0) - \Phi(0)}{z_0^2}.$$

Nous nous placerons d'abord dans le cas où la réflexion de l'électron a lieu dans la région centrale. Le point de rebroussement de la trajectoire est alors donné par

$$\Phi(0) + n z_r^2 = 0,$$

soit

$$(128) \quad z_r^2 = -\frac{2}{3} \frac{\Phi(0)}{\Phi(z_0) - \Phi(0)} z_0^2 = \frac{2}{3} \frac{x}{x-1} z_0^2.$$

Dans ce cas, rien n'est à changer aux raisonnements qui conduisent de l'équation (52) à l'équation (59). Lorsqu'on considère les rayons initialement parallèles à l'axe, on peut écrire directement pour les expressions de la trajectoire à l'incidence et à l'émergence

$$(129) \quad \begin{cases} r_1 = r_0 \operatorname{ch} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \sin \beta(z + z_0) \right], \\ r_2 = B \operatorname{ch} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \sin \beta(z + z_0) - \psi \right]. \end{cases}$$

Par contre, l'équation (61), qui représente la trajectoire de Gauss dans la partie centrale, doit être traitée de nouveau puisque $\frac{n}{\Phi(0)}$ est négatif. On peut alors poser

$$(130) \quad \frac{n}{\Phi(0)} = -\alpha'^2,$$

les quantités α' et β étant reliées par l'égalité

$$\frac{2}{\beta^2} + \frac{1}{\alpha'^2} = \frac{2}{3} z_0^2.$$

L'équation (61) s'écrit alors

$$(131) \quad (1 - \alpha'^2 z^2) \frac{d^2 r}{dz^2} - \alpha'^2 z \frac{dr}{dz} - \frac{\alpha'^2}{2} r = 0.$$

Faisons le changement de variable

$$\alpha' z = \operatorname{ch} \alpha' u.$$

Ce changement de variable est légitime, puisque l'on a

$$\begin{aligned} |\alpha' z|_{\min} &= \left| \sqrt{-\frac{n}{\Phi(0)}} z \right|_{\min} \\ &= \left| \sqrt{-\frac{3}{2} \frac{\Phi(z_0) - \Phi(0)}{z_0^2 \Phi(0)}} \right| z_r = 1. \end{aligned}$$

L'équation (131) devient

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}^2 \alpha' u \left(\frac{d^2 r}{du^2} \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \alpha' u} - \frac{dr}{du} \frac{\alpha' \operatorname{ch} \alpha' u}{\operatorname{sh}^2 \alpha' u} \right) \\ + \frac{\alpha' \operatorname{ch} \alpha' u}{\operatorname{sh} \alpha' u} \frac{dr}{du} + \frac{\alpha'^2}{2} r = 0, \end{aligned}$$

soit

$$\frac{d^2 r}{du^2} + \frac{\alpha'^2}{2} r = 0.$$

La solution générale de cette équation est

$$r = A \cos \left(\frac{\alpha'}{\sqrt{2}} u - \varphi \right)$$

ou bien

$$r = A \cos \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{ch} |\alpha' z| - \varphi \right).$$

En résumé, la trajectoire gaussienne du miroir est définie par les relations :

Région d'incidence :

$$(132_1) \quad r_1 = r_0 \operatorname{ch} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \sin \beta(z + z_0) \right];$$

Région centrale :

$$(132_2) \quad r_2 = A \cos \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{ch} |\alpha' z| - \varphi \right];$$

Région d'émergence :

$$(132_3) \quad r_3 = B \operatorname{sh} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \sin \beta(z + z_0) - \psi \right];$$

avec

$$(133) \quad \begin{cases} \beta = \frac{1}{z_0} \sqrt{3(1-x)}, \\ \alpha' = \sqrt{-\frac{n}{\Phi(0)}} = i\alpha = \frac{1}{z_0} \sqrt{\frac{3}{2} \frac{x-1}{x}}, \\ x = \frac{\Phi(0)}{\Phi(z_0)}. \end{cases}$$

Remarquons que l'abscisse du point de rebroussement, donnée par la relation (128), satisfait à la relation $z_r \alpha' + 1 = 0$.

Détermination des coefficients.

Les coefficients A, B, φ et ψ peuvent être déterminés, comme dans le cas de la lentille, à partir de la continuité de la trajectoire et de sa dérivée. Nous ne reproduirons pas ce calcul, calqué exactement sur celui des lentilles; nous donnons seulement le résultat. On trouve, en posant

$$(134) \quad \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{ch} \frac{2\alpha' z_0}{3} = \alpha'_0, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \sin \frac{\beta z_0}{3} = \beta_0, \end{cases}$$

les relations

$$(135) \quad \begin{cases} A^2 = r_0^2 [1 + 3 \operatorname{sh}^2 \beta_0], \\ \varphi = \alpha'_0 - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{2} \operatorname{th} \beta_0 \end{cases}$$

et suivant les valeurs de $K' = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg}(\alpha_0 + \varphi)$,

$|K'| < 1$:

$$(136_1) \quad \begin{cases} B^2 = A^2 \left[1 - \frac{3}{2} \sin^2(\alpha'_0 + \varphi) \right], \\ \psi = \beta_0 - \operatorname{arc th} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg}(\alpha'_0 + \varphi), \\ r_3 = B \operatorname{ch} [\quad]; \end{cases}$$

$|K'| > 1$:

$$(136_2) \quad \begin{cases} B^2 = A^2 \left[\frac{3}{2} \sin^2(\alpha'_0 + \varphi) - 1 \right], \\ \psi = \beta_0 - \operatorname{arc th} \sqrt{2} \operatorname{cotg}(\alpha'_0 + \varphi); \\ r_3 = B \operatorname{sh} [\quad]; \end{cases}$$

$K = 1$:

$$(136_3) \quad r_3 = \frac{A}{\sqrt{3}} e^{-\beta_0} e^{\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc sin} \beta(z+z_0)};$$

$K = -1$:

$$(136_4) \quad r_3 = \frac{A}{\sqrt{3}} e^{\beta_0} e^{-\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc sin} \beta(z+z_0)}.$$

La discussion des coefficients A , B , φ et ψ , l'étude de la marche des rayons principaux, la détermination des intersections avec l'axe, etc., se font exactement comme dans le cas de la lentille. On constate encore que le nombre des oscillations autour de l'axe est d'autant plus grand que x est plus voisin de zéro.

Calcul effectif des miroirs. Tracé des trajectoires.

Les tableaux suivants donnent quelques exemples de calcul de miroirs.

TABLEAU VIII. — Calcul du miroir $x = -0,1$.

$$\alpha' = \frac{4,06}{z_0}, \quad \beta = \frac{1,817}{z_0}, \quad \frac{A}{r_0} = 1,292, \quad \varphi = 0,625, \quad \frac{B}{r_0} = 0,840, \quad \psi = 0,791.$$

$$\text{Région d'incidence : } \frac{r}{r_0} = \operatorname{ch} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc sin} 1,817 \left(1 + \frac{z}{z_0} \right) \right].$$

$\frac{z}{z_0} = -1$	$\frac{r}{r_0} = 1$
$\frac{z}{z_0} = -0,9$	$\frac{r}{r_0} = \operatorname{ch} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc sin} 0,182 \right) = \operatorname{ch} 0,129 = 1,008$
$\frac{z}{z_0} = -0,8$	$\frac{r}{r_0} = \operatorname{ch} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc sin} 0,363 \right) = \operatorname{ch} 0,263 = 1,035$
$\frac{z}{z_0} = -\frac{2}{3}$	$\frac{r}{r_0} = \operatorname{ch} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc sin} 0,603 \right) = \operatorname{ch} 0,458 = 1,107$

$$\text{Région centrale : } \frac{r}{r_0} = 1,292 \cos \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc ch} 4,06 \left| \frac{z}{z_0} \right| - 0,625 \right).$$

$\frac{z}{z_0} = -\frac{2}{3}$	$\frac{r}{r_0} = 1,292 \cos \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc ch} 2,710 - 0,625 \right) = 1,107$
$\frac{z}{z_0} = -0,6$	$\frac{r}{r_0} = 1,292 \cos \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc ch} 2,436 - 0,625 \right) = 1,153$
$\frac{z}{z_0} = -0,5$	$\frac{r}{r_0} = 1,292 \cos \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc ch} 2,030 - 0,625 \right) = 1,225$
$\frac{z}{z_0} = -0,4$	$\frac{r}{r_0} = 1,292 \cos \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc ch} 1,624 - 0,625 \right) = 1,280$
$\frac{z}{z_0} = -0,3$	$\frac{r}{r_0} = 1,292 \cos \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc ch} 1,218 - 0,625 \right) = 1,273$
$\frac{z}{z_0} = -0,246$	$\frac{r}{r_0} = 1,292 \cos \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc ch} 1 - 0,625 \right) = 1,046$
$\frac{z}{z_0} = -0,3$	$\frac{r}{r_0} = 1,292 \cos \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc ch} 1,218 - 0,625 \right) = 0,603$
$\frac{z}{z_0} = -0,4$	$\frac{r}{r_0} = 1,202 \cos \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc ch} 1,624 - 0,625 \right) = 0,247$
$\frac{z}{z_0} = -0,5$	$\frac{r}{r_0} = 1,292 \cos \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc ch} 2,030 - 0,625 \right) = 0$

TABLEAU VIII (suite).

$$\begin{aligned} \frac{z}{z_0} = -0,6 \dots \dots \dots \frac{r}{r_0} &= 1,292 \cos \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc ch} 2,436 - 0,625 \right) = -0,182 \\ \frac{z}{z_0} = -\frac{2}{3} \dots \dots \dots \frac{r}{r_0} &= 1,292 \cos \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc ch} 2,710 - 0,625 \right) = -0,286 \end{aligned}$$

Région d'émergence : $\frac{r}{r_0} = 0,840 \operatorname{sh} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc sin} 1,817 \left(1 + \frac{z}{z_0} \right) - 0,791 \right].$

$$\begin{aligned} \frac{z}{z_0} = -\frac{2}{3} \dots \dots \dots \frac{r}{r_0} &= 0,840 \operatorname{sh}(0,458 - 0,791) = -0,286 \\ \frac{z}{z_0} = -0,8 \dots \dots \dots \frac{r}{r_0} &= 0,840 \operatorname{sh}(0,263 - 0,791) = -0,463 \\ \frac{z}{z_0} = -0,9 \dots \dots \dots \frac{r}{r_0} &= 0,840 \operatorname{sh}(0,129 - 0,791) = -0,597 \\ \frac{z}{z_0} = -1 \dots \dots \dots \frac{r}{r_0} &= 0,840 \operatorname{sh}(\quad - 0,791) = -0,735 \end{aligned}$$

TABLEAU IX. — Calcul du miroir $x = -0,75$.

$$x = \frac{1,870}{z_0}, \quad \beta = \frac{2,290}{z_0}, \quad \frac{A}{r_0} = 1,510, \quad \varphi = -0,167, \quad \frac{B}{r_0} = 1,392, \quad \psi = 0,375.$$

Région d'incidence : $\frac{r}{r_0} = \operatorname{ch} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc sin} 2,290 \left(1 + \frac{z}{z_0} \right) \right].$

$$\begin{aligned} \frac{z}{z_0} = -1 \dots \dots \dots \frac{r}{r_0} &= 1 \\ \frac{z}{z_0} = -0,9 \dots \dots \dots \frac{r}{r_0} &= \operatorname{ch} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc sin} 0,229 \right) = \operatorname{ch} 0,164 = 1,013 \\ \frac{z}{z_0} = -0,8 \dots \dots \dots \frac{r}{r_0} &= \operatorname{ch} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc sin} 0,458 \right) = \operatorname{ch} 0,332 = 1,155 \\ \frac{z}{z_0} = -\frac{2}{3} \dots \dots \dots \frac{r}{r_0} &= \operatorname{ch} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc sin} 0,763 \right) = \operatorname{ch} 0,614 = 1,195 \end{aligned}$$

Région centrale : $\frac{r}{r_0} = 1,510 \cos \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc ch} 1,870 \left| \frac{z}{z_0} \right| + 0,167 \right).$

$$\begin{aligned} \frac{z}{z_0} = -\frac{2}{3} \dots \dots \dots \frac{r}{r_0} &= 1,51 \cos \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc ch} 1,248 + 0,167 \right) = 1,195 \\ \frac{z}{z_0} = -0,6 \dots \dots \dots \frac{r}{r_0} &= 1,51 \cos \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc ch} 1,122 + 0,167 \right) = 1,315 \\ \frac{z}{z_0} = -0,535 \dots \dots \dots \frac{r}{r_0} &= 1,51 \cos \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc ch} 1 \quad + 0,167 \right) = 1,490 \\ \frac{z}{z_0} = -0,6 \dots \dots \dots \frac{r}{r_0} &= 1,51 \cos \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc ch} 1,122 + 0,167 \right) = 1,185 \\ \frac{z}{z_0} = -\frac{2}{3} \dots \dots \dots \frac{r}{r_0} &= 1,51 \cos \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc ch} 1,248 + 0,167 \right) = 1,432 \end{aligned}$$

Région d'émergence : $\frac{r}{r_0} = 1,392 \operatorname{ch} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc sin} 2,290 \left(1 + \frac{z}{z_0} \right) - 0,376 \right].$

$$\begin{aligned} \frac{z}{z_0} = -\frac{2}{3} \dots \dots \dots \frac{r}{r_0} &= 1,392 \operatorname{ch}(0,614 - 0,376) = 1,432 \\ \frac{z}{z_0} = -0,8 \dots \dots \dots \frac{r}{r_0} &= 1,392 \operatorname{ch}(0,332 - 0,376) = 1,292 \\ \frac{z}{z_0} = -0,9 \dots \dots \dots \frac{r}{r_0} &= 1,392 \operatorname{ch}(0,164 - 0,376) = 1,122 \\ \frac{z}{z_0} = -1 \dots \dots \dots \frac{r}{r_0} &= 1,392 \operatorname{ch}(\quad - 0,376) = 1,492 \end{aligned}$$

La figure 28 montre les rayons principaux, calculés d'après la théorie précédente pour un certain nombre

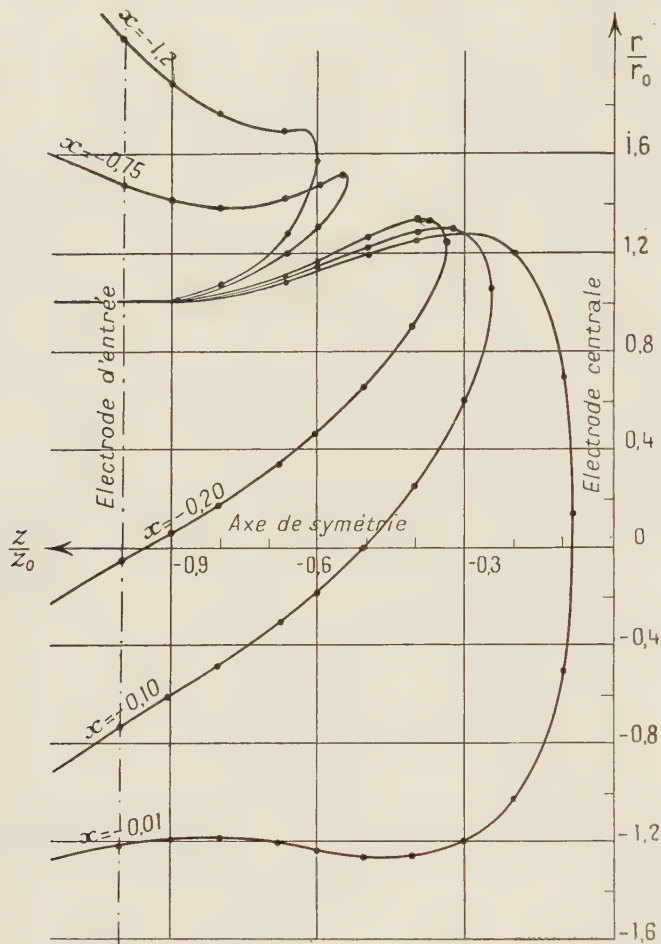


Fig. 28. — Rayons principaux dans le miroir

en fonction du paramètre $x = \frac{\Phi(0)}{\Phi(z_0)}$.

de miroirs. Certaines de ces trajectoires avaient déjà été calculées antérieurement [20] par un procédé différent et à l'aide de données fournies par la cuve électrolytique. L'accord est très satisfaisant. Toutefois, et comme dans le cas des lentilles, les calculs que nous venons d'exposer permettent d'arriver rapidement au résultat et ne nécessitent point de mesures à la cuve. En outre, ils permettent de déterminer des formules explicites pour les caractéristiques optiques du miroir.

Étude de la distance focale.

On peut établir l'expression de la distance focale soit à partir de l'asymptote au rayon émergent

(comme nous l'avons fait dans le cas de la lentille), soit plus simplement en remarquant qu'on passe des équations de la lentille à celles du miroir en changeant $\text{arc sh } \frac{2xz_0}{3}$ en $\text{arc ch } \frac{2\alpha lz_0}{3}$.

L'expression (103) s'écrit alors dans le cas du miroir (en tenant compte du signe de la distance focale)

$$(137) \quad \frac{1}{f} = -\beta \left(\frac{3}{2} \text{ch}^2 \beta_0 - 1 \right) \times \sin \left(2x'_0 - \text{arc tg } \frac{2\sqrt{2} \text{th } \beta_0}{1 - 2 \text{th}^2 \beta_0} \right).$$

La figure 29 montre la variation de la distance focale du miroir pour $x < -0,01$, domaine que nous étudierons d'abord. Les deux branches distinctes de la courbe correspondent au miroir convergent ($f < 0$) et au miroir divergent ($f > 0$). La région des miroirs convergents est séparée de la zone des miroirs divergents par la valeur $f = \pm \infty$ pour laquelle le système agit en miroir plan : dans l'approximation de Gauss, la trajectoire de l'électron revient sur elle-même. L'équation (137) montre que pour $x = -0,5$, on a $f = \pm \infty$. On retrouve évidemment cette valeur à partir de l'équation $\varphi = 0$, soit

$$(138) \quad \text{tg} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \text{arc ch } \sqrt{\frac{2}{3} \frac{x-1}{x}} \right) = \sqrt{2} \text{th} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \text{arc sin } \sqrt{\frac{1-x}{3}} \right).$$

La figure 29 met en évidence une propriété remarquable des miroirs divergents. Nous avons vu que

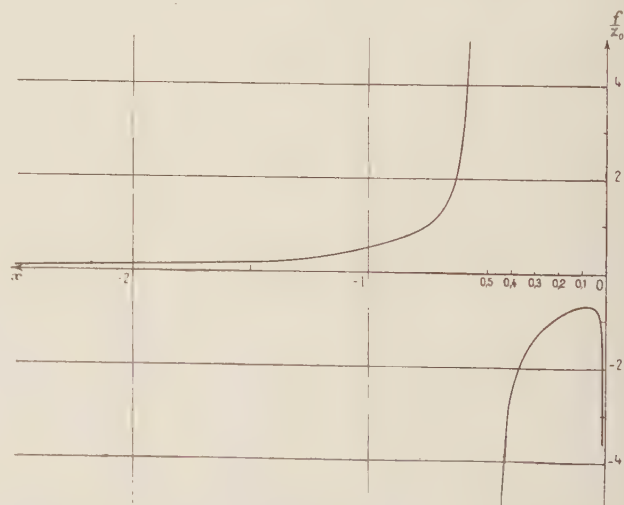


Fig. 29. — Distance focale du miroir en fonction de x .

dans le cas $0 < x < 1$, il est difficile de réaliser des lentilles anastigmatiques puisque la dérivée $\frac{df}{dx}$

possède, en général, des valeurs importantes. Il n'en est plus de même pour les lentilles $x > 1$, où $\frac{df}{dx}$ peut prendre des valeurs très faibles; toutefois, dans ce cas, il est difficile d'obtenir de faibles distances focales. Par contre, le miroir divergent permet de réaliser des systèmes à la fois anastigmatiques et de faible distance focale. On voit que pour $x < -1,3$, f est très peu sensible aux petites variations mécaniques et électriques et peut être rendu en même temps très faible, de l'ordre de $0,2 z_0$ ou moins.

Pour les valeurs de x voisines de zéro, la formule (137) devient

$$(139) \quad \frac{f}{z_0} = \frac{0,72}{\sin \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \log_e(-x) + 0,355 \right]}.$$

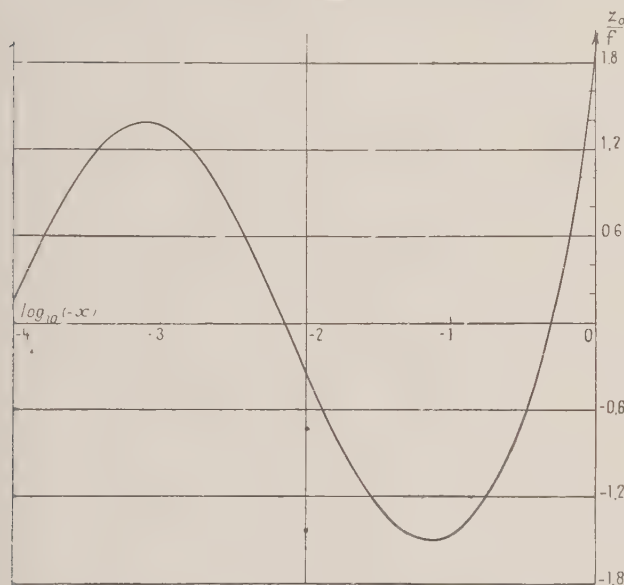


Fig. 30. — Pouvoir convergent du miroir en fonction de x .

Cette expression peut évidemment être établie à partir de (106) sans aucun calcul. Elle montre que pour x tendant vers zéro, le miroir est alternativement convergent ou divergent suivant le signe de f . On peut dresser ainsi le tableau suivant.

TABLEAU X.

$-2 < x < -0,5$	Miroir divergent
$x = -0,5$	» plan
$-0,5 < x < -7,11.10^{-3}$	» convergent
$x = -7,11.10^{-3}$	» plan
$-7,11.10^{-3} < x < -8,2.10^{-5}$...	» divergent, etc.

Il résulte, d'autre part, de (139) que dans la région oscillatoire ($x > -0,01$), la distance focale est

minimum (avec $f_{\min} = 0,72 z_0$) pour $x = -5,8.10^{-2}$, $-7,6.10^{-4}$, $-8,96.10^{-6}$, etc.

La figure 30 montre la variation du pouvoir convergent du miroir en fonction de x . Des formules analogues à (112) et (115) peuvent être établies pour l'abscisse du foyer et la position du plan principal du miroir.

Cas où la réflexion de l'électron a lieu dans la région d'incidence.

Ce cas correspond à une électrode centrale très fortement survoltée (en valeur absolue) par rapport à la cathode. Le point de rebroussement de la trajectoire est donné ici par

$$(140) \quad \Phi(z_0) - 2n(z_r + z_0)^2 = 0,$$

c'est-à-dire en résolvant

$$(141) \quad z_r = z_0 \left[\frac{1}{\sqrt{3(1-x)}} - 1 \right].$$

On voit que lorsque x varie de -2 à $-\infty$, z_r parcourt l'intervalle compris entre $-\frac{2}{3} z_0$ et $-z_0$.

Un calcul simple fournit pour les équations de la trajectoire :

à l'incidence :

$$(142_1) \quad r = r_0 \operatorname{ch} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \beta(z + z_0) \right];$$

à l'émergence :

$$(142_2) \quad r = r_0 \operatorname{ch} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\pi - \arcsin \beta(z + z_0) \right] \right\}.$$

La distance focale $f = -\frac{r_0}{\left(\frac{dr}{dz}\right)_{z=-z_0}}$ s'écrit

$$(142_3) \quad \frac{f}{z_0} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3(1-x)} \operatorname{sh} \frac{\pi}{\sqrt{2}}}.$$

On voit que le pouvoir convergent tend vers l'infini en même temps que x . Les valeurs de f , calculées d'après la relation, (142) ont été portées sur la figure 29.

TROISIÈME SECTION.

Quelques propriétés intéressantes de lentilles particulières.

Dans les Chapitres précédents, nous avons étudié la lentille électrostatique indépendante et les miroirs qui s'y rattachent à partir des hypothèses fonda-

mentales, formulées au début de ce travail. Le résultat essentiel qui se dégage de cette étude est la possibilité de représenter par des formules relativement simples les propriétés optiques fondamentales de la lentille et du miroir en fonction du paramètre

$$r = \frac{\Phi(o)}{\Phi(z_0)},$$

qui synthétise les caractéristiques géométriques et électriques du système.

Nous allons essayer maintenant de développer un certain nombre de points de la théorie précédemment exposée.

Lentille à trou central elliptique.

Ce problème a été traité par différents auteurs [16, 17, 18, 21, 22, 23] aussi bien sous ses aspects théoriques qu'au point de vue pratique. Nous proposons

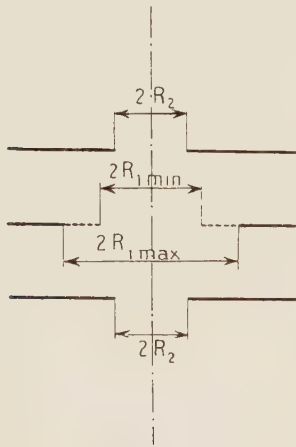


Fig. 31.

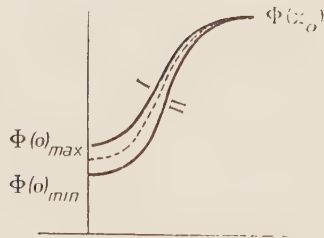


Fig. 32.

ici un calcul simple, qui permet de déterminer la limite de résolution de la lentille en fonction de l'ellipticité de l'électrode centrale.

Soient (fig. 31) $2R_{1\max}$ et $2R_{1\min}$ les axes de l'ellipse formée par le trou central de la lentille. Le système est symétrique par rapport aux plans $(Oz, R_{1\max})$ et $(Oz, R_{1\min})$.

Nous ferons (fig. 32) pour la loi du potentiel l'hypothèse simple suivante, dont il est intéressant d'examiner les conséquences :

$$(143_1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi(z) = \Phi(z_0) - 2n_{\max}(z \pm z_0)^2, \\ z_0 > |z| > \frac{2}{3}z_0; \\ \Phi(z) = \Phi(o)_{\max} + n_{\max}z^2, \\ 0 < |z| < \frac{2}{3}z_0 \end{array} \right.$$

et

$$(143_2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi(z) = \Phi(z_0) - 2n_{\min}(z \pm z_0)^2, \\ z_0 > |z| > \frac{2}{3}z_0; \\ \Phi(z) = \Phi(o)_{\min} + n_{\min}z^2, \\ 0 < |z| < \frac{2}{3}z_0 \end{array} \right.$$

dans les deux plans respectivement.

Les équations qui régissent la trajectoire restent applicables aux deux plans de symétrie $(Oz, R_{1\max})$ et $(Oz, R_{1\min})$. On obtient alors pour les trajectoires de Gauss dans les plans considérés :

$$(144_1) \quad \left\{ \begin{array}{l} r_0 \operatorname{ch} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \sin \beta_{\max}(z + z_0) \right], \\ A_{\max} \cos \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{sh} z_{\max} z - \varphi_{\max} \right], \\ B_{\max} \operatorname{ch} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \sin \beta_{\max}(z - z_0) - \psi_{\max} \right] \end{array} \right.$$

et

$$(144_2) \quad \left\{ \begin{array}{l} r_0 \operatorname{ch} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \sin \beta_{\min}(z + z_0) \right], \\ A_{\min} \cos \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{sh} z_{\min} z - \varphi_{\min} \right], \\ B_{\min} \operatorname{ch} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \sin \beta_{\min}(z - z_0) - \psi_{\min} \right] \end{array} \right.$$

respectivement.

Soient $f_{\max}$ et $f_{\min}$ les distances focales correspondant à ces deux trajectoires et $\operatorname{tg} \lambda$ la tangente angulaire de la caractéristique $f = f(x)$ (fig. 20). On a

$$(145) \quad \frac{\Delta f}{z_0} = \frac{f_{\max} - f_{\min}}{z_0} = \operatorname{tg} \lambda (x_{\max} - x_{\min}).$$

Supposons encore le montage bipolaire (électrode centrale reliée à la cathode) et $R_2 \ll \pi z_0$. La relation (145) devient alors, en vertu de (26),

$$(146) \quad \Delta f = \frac{2 \operatorname{tg} \lambda}{\pi} \Delta R_1.$$

Si l'on appelle α l'ouverture du faisceau, le dia-

mètre de la tache de diffusion due à l'aberration d'ellipticité s'écrit

$$(147) \quad \varpi = \frac{2\alpha}{\pi} \operatorname{tg} \lambda \Delta R_1.$$

On voit que le pouvoir séparateur de la lentille est directement proportionnel à ΔR_1 et que l'importance de l'aberration d'ellipticité peut devenir prépondérante par suite de la présence du facteur α^2 .

En outre, la relation (147) montre l'intérêt qu'il y a à choisir le point de fonctionnement dans une région où la pente de la caractéristique est aussi faible que possible.

Les conséquences de notre hypothèse de départ sont ainsi en bon accord avec les résultats de la théorie exacte développée par F. Bertein [16]. Éclaircissons cependant un paradoxe apparent : lorsque $\operatorname{tg} \lambda = 0$, on a $\varpi = 0$. Mais on peut remarquer que, dans ce cas, $x_{\max}$ et $x_{\min}$ coïncident; on a alors affaire à une lentille ronde pour laquelle la perturbation d'ellipticité est évidemment nulle.

À titre d'application numérique, posons

$$\varpi = 1 \text{ m}\mu = 10^{-6} \text{ mm}, \quad \alpha = 3 \cdot 10^{-3}.$$

Pour un objectif classique $\operatorname{tg} \lambda$ est voisin de 2. Il en résulte pour la tolérance sur le rayon $\Delta R_1 = 0,3 \mu$.

Les calculs précédents montrent également que tant que le rayon R_2 n'est pas démesurément grand, l'influence d'une ovalisation possible des trous extérieurs est négligeable.

Lentille à électrodes décentrées.

Soit e (fig. 33) la distance entre l'axe de la pièce centrale et l'axe des électrodes extérieures, supposées alignées. Nous admettrons que l'écart e est faible par rapport aux dimensions de la lentille. La figure 34 représente alors, d'une manière schématique, les limites entre lesquelles oscillera la courbe du potentiel.

La relation approchée

$$\Phi(z_0)_{\max} = \Phi(z_0) - \frac{e^2}{4} \Phi''(z_0)$$

fournit

$$(148) \quad \Phi(z_0)_{\max} = \Phi(z_0) + n e^2.$$

On a ensuite

$$x_{\max} - x_{\min} = \frac{\Phi(0)}{\Phi(z_0)_{\min}} - \frac{\Phi(0)}{\Phi(z_0)_{\max}}.$$

soit

$$\Delta x = 2x^2 e^2 n,$$

$$\text{ou bien, puisque } n = \frac{3}{2} \frac{1-x}{x} \frac{1}{z_0^2},$$

$$(149) \quad \Delta x = \frac{3x(1-x)e^2}{z_0^2}.$$

Il en résulte pour la limite de résolution

$$(150) \quad \varpi = \frac{3\alpha x(1-x)e^2 \operatorname{tg} \lambda}{4z_0}.$$

On se placera dans les conditions les plus défavorables lorsque $x = \frac{1}{2}$. On obtient alors

$$(151) \quad \varpi = \frac{3\alpha e^2 \operatorname{tg} \lambda}{4z_0}.$$

La limite de résolution étant proportionnelle à e^2 ,

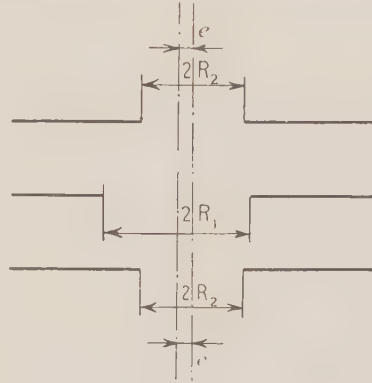


Fig. 33.

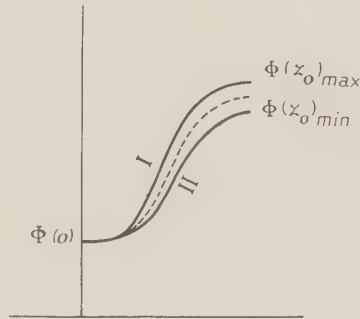


Fig. 34.

l'influence du décentrage diminue rapidement avec e . En fait, pour $\alpha = 3 \cdot 10^{-3}$, $e = 10^{-2} \text{ mm}$, $z_0 = 4,5 \text{ mm}$, $\operatorname{tg} \lambda = 2$, on trouve $\varpi \cong 10^{-7} \text{ mm}$.

Lentilles à petits trous.

Il est clair que lorsque les diamètres des trous des électrodes tendent vers zéro, la distribution du potentiel à l'intérieur de la lentille tend vers une forme linéaire. Pour les lentilles à trous très faibles, il est alors indiqué de raccorder les deux paraboles centrale et extérieure par une droite (fig. 35). Soit

$$(152) \quad \Phi(z) = az + b,$$

l'équation de cette droite intermédiaire. Les équations

de la trajectoire de Gauss ne changeront pas dans les régions extérieure et centrale. Par contre, dans les régions intermédiaires, on aura

$$(153) \quad 4(\pm az + b) \frac{d^2 r}{dz^2} \pm 2a \frac{dr}{dz} = 0,$$

d'où, par une intégration facile,

$$r = A \sqrt{\pm az + b} + B.$$

Finalement, les équations du rayon principal seront :

Région d'incidence :

$$(154_1) \quad r_1 = r_0 \operatorname{ch} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \beta(z + z_0) \right];$$

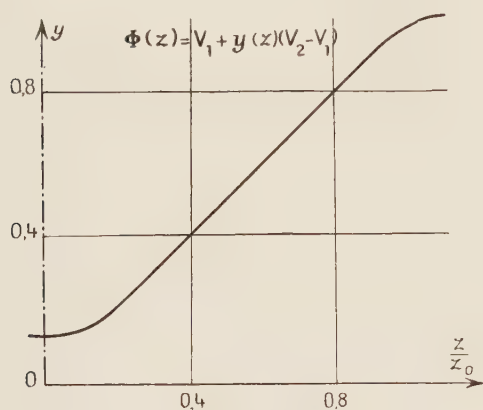


Fig. 35.

Première région intermédiaire :

$$(154_2) \quad r_2 = A \sqrt{-az + b} + B;$$

Région centrale :

$$(154_3) \quad r_3 = C \cos \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arcsinh} \alpha z - \varphi \right);$$

Deuxième région intermédiaire :

$$(154_4) \quad r_4 = D \sqrt{az + b} + E;$$

Région d'émergence :

$$(154_5) \quad r_5 = F \operatorname{ch} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \beta'(z - z_0) - \psi \right].$$

Les calculs deviennent plus compliqués sans introduire toutefois de changement essentiel dans la structure du rayon de Gauss. Celui-ci peut notamment, suivant les valeurs initiales du système, osciller plusieurs fois autour de l'axe avant de quitter la lentille.

Miroir à deux électrodes.

Le miroir que nous avons étudié précédemment était obtenu par sulvoltage de l'électrode centrale d'une lentille électrostatique à trois diaphragmes.



Fig. 36. — Miroir à deux électrodes.

Si l'on veut, avec un miroir de ce genre, obtenir des convergences élevées sans exagérer la valeur de la tension, on est obligé de diminuer le diamètre du trou central. A la limite, on arrive évidemment à un miroir à deux électrodes : une électrode extérieure, portée généralement au potentiel du sol et une plaque intérieure, à laquelle on applique une tension négative par rapport à la cathode (fig. 36). Nous admettons que le potentiel sur l'axe de ce système peut être représenté par une parabole dans la région extérieure et une droite dans la région intérieure, le point

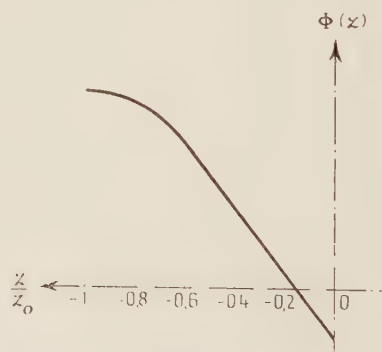


Fig. 37. — Distribution du potentiel sur l'axe d'un miroir à deux électrodes.

de raccordement de ces éléments étant $\zeta = -\frac{2}{3}z_0$ (fig. 37).

Soient

$$(155) \quad \begin{cases} \Phi(z) = \Phi(0) + pz \\ \text{et} \\ \Phi(z) = \Phi(z_0) + q(z + z_0)^2 \end{cases}$$

les équations de la courbe du potentiel. La conti-

nuité de celui-ci fournit, en tenant compte du fait qu'ici $\Phi(0) = V_1$

$$V_1 - \frac{2}{3} p z_0 = \Phi(z_0) + q \frac{z_0^2}{9}, \quad p = \frac{2q}{3} z_0.$$

soit

$$(156) \quad \begin{cases} p = \frac{6}{13} \frac{V_1 - \Phi(z_0)}{z_0}, \\ q = \frac{9}{13} \frac{V_1 - \Phi(z_0)}{z_0^2}. \end{cases}$$

Le point de rebroussement (lorsqu'il est situé dans la région centrale) est donné par

$$V_1 + p z_r = 0$$

soit, en posant

$$(157) \quad x = \frac{V_1}{\Phi(z_0)},$$

$$(158) \quad z_r = \frac{13}{6} \frac{x}{1-x} z_0.$$

Les équations du rayon principal s'écrivent :

Région d'incidence :

$$(159_1) \quad r_1 = r_0 \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arcsin} \beta(z + z_0) \right];$$

Région centrale :

$$(159_2) \quad r_2 = A \sqrt{p z + V_1} + B;$$

Région d'émergence :

$$(159_3) \quad r_3 = C \operatorname{ch} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arcsin} \beta(z + z_0) - \varphi \right],$$

avec

$$(160) \quad \beta = \frac{1}{z_0} \sqrt{\frac{9}{13} (1-x)}.$$

Les deux déterminations de la racine carrée définissent les deux branches de la trajectoire dans la région centrale. On a évidemment $r(z_r) = B$.

Le calcul des coefficients A, B, C et φ se fait d'une manière analogue à celle exposée dans le cas des lentilles.

Il apparaît toutefois un changement essentiel par rapport au miroir à trois électrodes : dans le cas actuel, le rayon n'est plus capable d'effectuer des oscillations multiples autour de l'axe. Lorsque ces oscillations sont gênantes, on aura avantage à utiliser un miroir à deux électrodes.

Position du point d'inflexion de la courbe du potentiel.

Dans les calculs développés précédemment, la représentation algébrique de la distribution du potentiel sur l'axe a été effectuée à l'aide de trois

paraboles raccordées aux points d'inflexion de la courbe (12). Or, c'est seulement dans le cas où $\frac{R_2}{R_1} = \frac{1}{2}$

que les points d'inflexion sont donnés par $\zeta = \pm \frac{2}{3} z_0$.

Si l'on pose $\zeta = \pm k z_0$, la relation (29) montre que, dans le cas général, k est fonction des rapports $\frac{z_0}{R_1}$ et $\frac{z_0}{R_2}$:

$$k = k\left(\frac{z_0}{R_1}, \frac{z_0}{R_2}\right).$$

La théorie que nous avons établie pour $k = \frac{2}{3}$ peut évidemment être élargie au cas où k est quelconque.

Cherchons l'influence d'une variation du paramètre k sur les caractéristiques optiques de la lentille.

On a d'abord, pour la représentation du potentiel sur l'axe,

$$(161) \quad \begin{cases} \Phi_1(z) = \Phi(0) + p z^2 \\ \text{pour } 0 < |z| < k z_0, \\ \Phi_2(z) = \Phi(z_0) + q(z \pm z_0) \\ \text{pour } k z_0 < |z| < z_0, \end{cases}$$

p et q étant déterminés par les relations

$$\begin{aligned} \Phi_1(k z_0) &= \Phi_2(k z_0), \\ \Phi'_1(k z_0) &= \Phi'_2(k z_0), \end{aligned}$$

soit

$$(162) \quad \begin{cases} \Phi(0) + p k^2 z_0^2 = \Phi(z_0) + q(1-k)^2 z_0^2, \\ p k z_0 = q(k-1) z_0. \end{cases}$$

En résolvant, on trouve

$$(163) \quad \begin{cases} p = \frac{1}{k} \frac{\Phi(z_0) - \Phi(0)}{z_0^2}, \\ q = \frac{1}{k-1} \frac{\Phi(z_0) - \Phi(0)}{z_0^2}. \end{cases}$$

Les équations du rayon principal deviennent ensuite :

dans la région d'incidence :

$$(164_1) \quad r_1 = r_0 \operatorname{ch} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arcsin} \beta(z + z_0) \right];$$

dans la région centrale :

$$(164_2) \quad r_2 = A \cos \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arcsin} \beta(z - z_0) - \varphi \right];$$

dans la région d'émergence :

$$(164_3) \quad r_3 = B \operatorname{ch} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arcsin} \beta(z - z_0) - \psi \right];$$

avec

$$(165) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{z_0} \sqrt{\frac{1-x}{k}} \frac{1-x}{x}, & \beta &= \frac{1}{z_0} \sqrt{\frac{1}{1-k}} (1-x), \\ x &= \frac{\Phi(0)}{\Phi(z_0)}. \end{aligned} \right.$$

Les quatre relations

$$\begin{aligned} r_1(-kz_0) &= r_2(-kz_0), & r'_1(-kz_0) &= r'_2(-kz_0); \\ r_2(kz_0) &= r_3(kz_0), & r'_2(kz_0) &= r'_3(kz_0) \end{aligned}$$

permettent encore de déterminer les quatre coefficients A, B, φ et β .

En posant

$$(166) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arsh} \alpha k z_0 &= \alpha_0, & \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \beta (1-k) z_0 &= \beta_0; \\ \lambda &= \sqrt{\frac{k}{1-k}}, \end{aligned} \right.$$

on trouve

$$(167) \quad \left\{ \begin{aligned} A^2 &= r_0^2 (\operatorname{ch}^2 \beta_0 + \lambda^2 \operatorname{sh}^2 \beta_0), \\ \varphi &= \arctg \lambda \operatorname{th} \beta_0 - \alpha_0 \end{aligned} \right.$$

et suivant les valeurs de $K = \frac{1}{\lambda} \operatorname{tg}(\alpha_0 - \varphi)$:

$|K| < 1$:

$$(168_1) \quad \left\{ \begin{aligned} B^2 &= A^2 \left[\cos^2(\alpha_0 - \varphi) - \frac{1}{\lambda^2} \sin^2(\alpha_0 - \varphi) \right], \\ \psi &= \arctg \frac{1}{\lambda} \operatorname{tg}(\alpha_0 - \varphi) - \beta_0, \\ r_3 &= B \operatorname{ch}[\quad]; \end{aligned} \right.$$

$|K| > 1$:

$$(168_2) \quad \left\{ \begin{aligned} B^2 &= A^2 \left[\frac{1}{\lambda^2} \sin^2(\alpha_0 - \varphi) - \cos^2(\alpha_0 - \varphi) \right], \\ \psi &= \arctg \lambda \operatorname{cotg}(\alpha_0 - \varphi) - \beta_0, \\ r_3 &= B \operatorname{sh}[\quad]. \end{aligned} \right.$$

Le calcul de la distance focale

$$f = \frac{-r_0}{\left(\frac{dr}{dz} \right)_{z=z_0}}$$

fournit l'expression

$$(169) \quad f = \frac{\lambda \sqrt{2}}{\beta (\operatorname{ch}^2 \beta_0 - \lambda^2 \operatorname{sh}^2 \beta_0) \sin 2\alpha_0 - \lambda \operatorname{sh} 2\beta_0 \cos 2\alpha_0}.$$

Après quelques transformations, on trouve pour le pouvoir convergent, l'expression

$$(170) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{z_0}{f} &= \sqrt{\frac{1-x}{2k}} \frac{\operatorname{ch}^2 \beta_0 - k}{1-k} \\ &\times \sin \left[2\alpha_0 - \arctg \frac{2\sqrt{k(1-k)} \operatorname{th} \beta_0}{1-k(1+\operatorname{th}^2 \beta_0)} \right], \end{aligned} \right.$$

qui met en évidence son caractère oscillatoire.

La convergence maximum (distance focale minimum) est donnée sensiblement par

$$(171) \quad \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{z_0}{f} \right)_{\max} &= \sqrt{\frac{1-x}{2k}} \\ &\times \frac{\operatorname{ch}^2 \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \sqrt{(1-x)(1-k)} \right] - k}{1-k}, \end{aligned} \right.$$

avec x déterminé par

$$2\alpha_0 - (2n+1)\frac{\pi}{2} = \arctg \frac{2\sqrt{k(1-k)} \operatorname{th} \beta_0}{1-k(1+\operatorname{th}^2 \beta_0)},$$

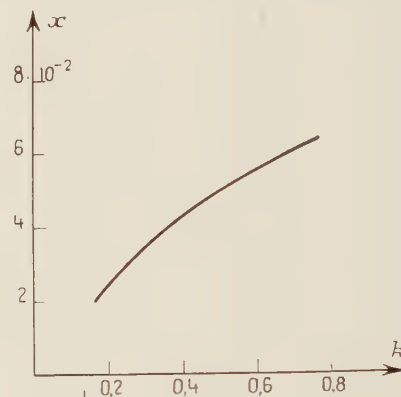


Fig. 38. — Position du premier minimum de f en fonction de k .

soit

$$(172) \quad \operatorname{tg} \left[\sqrt{2} \operatorname{arsh} \sqrt{k \frac{1-x}{x}} - (2n+1) \frac{\pi}{2} \right] = \frac{2\sqrt{k(1-k)} \operatorname{th} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \sqrt{(1-x)(1-k)} \right]}{1-k-k \operatorname{th}^2 \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \sqrt{(1-x)(1-k)} \right]}.$$

Les racines de cette équation pour $n=0$, c'est-à-dire les valeurs de x pour lesquelles on obtient le premier minimum de la distance focale, ont été portées dans la figure 38.

La figure 39 donne la valeur de ce minimum en fonction de k , tandis que la figure 40 montre l'allure de la courbe $f=f(x)$ au voisinage du premier minimum et pour différentes valeurs du paramètre k . Il en résulte que dans l'intervalle utile ($0,3 < k < 0,7$), la distance focale minimum varie à peu près linéairement en fonction de k ; il en est de même de la valeur de x qui rend la distance focale minimum.

Les minima d'ordre supérieur sont donnés très sensiblement par

$$(173) \quad \left(\frac{f}{z_0} \right)_{\min} = \frac{(1-k) \sqrt{2k}}{\operatorname{ch}^2 \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \sqrt{1-k} \right] - k},$$

la courbe correspondante a été portée dans la figure 39.

Les graphiques précédents montrent que si l'on veut obtenir de faibles distances focales, il faut choisir k aussi faible que possible. Dans quelle mesure cette condition est-elle réalisable ? La réponse à cette question est fournie par l'équation (29') qu'on peut écrire

$$\frac{R_2^2}{[R_2^2 + (1 - k)^2 z_0^2]} = \frac{2 R_1^2}{[R_1^2 + k^2 z_0^2]}$$

ou bien, sous une forme plus symétrique

$$(17'') \quad \left[1 - k^2 \left(\frac{z_0}{R_1} \right)^2 \right]^2 = 2 \frac{R_2}{R_1} \left[1 - (1 - k)^2 \left(\frac{z_0}{R_2} \right)^2 \right]^2.$$

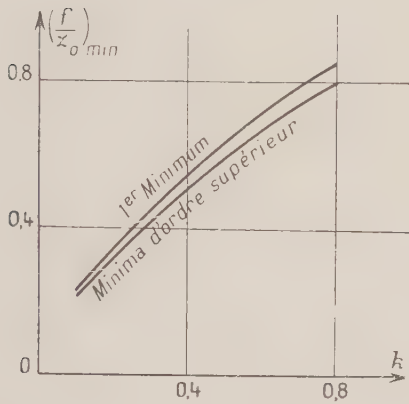


Fig. 39. — Valeurs de $\left(\frac{f}{z_0} \right)_{\min}$ en fonction de k .

Pour un objectif courant, on a

$$\frac{z_0}{R_1} = 2 \text{ à } 2,5; \quad \frac{z_0}{R_2} \cong 5, \quad \text{d'où} \quad k = 0,64 \text{ à } 0,67.$$

Pour une lentille de projection usuelle, on a

$$\frac{z_0}{R_1} \cong 4, \quad \frac{z_0}{R_2} \cong 5, \quad \text{d'où} \quad k = 0,60.$$

On voit donc que la valeur $k = \frac{2}{3}$, sur laquelle nous avons tablé dans l'étude détaillée des lentilles, correspond à la majorité des cas pratiques.

Il est clair par ailleurs que pour obtenir des valeurs de k aussi faibles que possible, il faut choisir $\frac{z_0}{R_1}$ aussi grand que possible. Il est difficile de dépasser $\frac{z_0}{R_1} = \frac{z_0}{R_2}$, car pour $R_1 < R_2$, on obtiendrait un champ beaucoup trop fort à l'extérieur de la lentille dans le cas

de l'objectif ou des rayons transgaussiens gênants dans le cas de la lentille de projection.

Pour $\frac{z_0}{R_1} = \frac{z_0}{R_2} = \frac{z_0}{R}$, l'équation (174) fournit

$$(175) \quad [k^2 - \sqrt{2}(1 - k)^2] \left(\frac{z_0}{R} \right)^2 = \sqrt{2}.$$

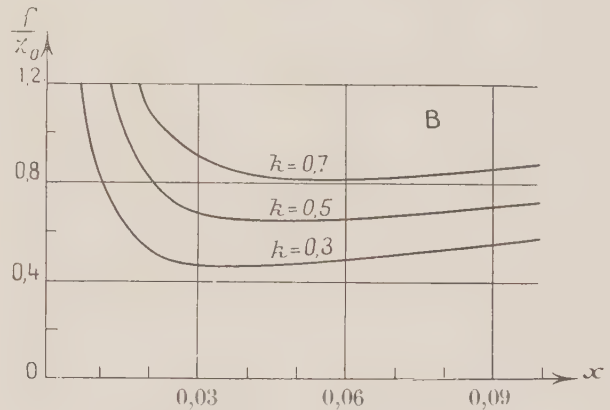
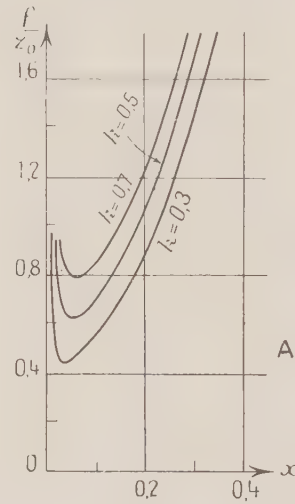


Fig. 40 A et B. — Distances focales pour différentes valeurs de k .

La valeur minimum de k utilisable pratiquement est donc donnée par

$$k^2 - \sqrt{2}(1 - k)^2 = 0,$$

soit

$$(175) \quad k_{\min} = \frac{\sqrt[4]{2}}{1 + \sqrt{2}} = 0,544.$$

En réalité, pour ne pas rendre $\frac{z_0}{R}$ trop grand, on prendra une valeur un peu plus forte pour k . Par exemple, pour $\frac{z_0}{R} = 6$, on a $k = 0,552$, correspondant à une distance focale minimum $f_{\min} = 0,67 z_0$.

Représentation du potentiel par une quartique.
(Peut être omis dans une première lecture).

Nous avons vu qu'on pouvait synthétiser les trois paraboles représentant le potentiel sur l'axe dans une quartique

$$(34) \quad \Phi(z) = mz^4 + nz^2 + p.$$

Les coefficients m , n et p peuvent être calculés alors par les relations

$$(35) \quad \begin{cases} m = -\frac{\Phi(z_0) - \Phi(0)}{z_0^4}, & n = 2 \frac{\Phi(z_0) - \Phi(0)}{z_0^2}, \\ p = \Phi(0). \end{cases}$$

Nous avons montré que cette représentation est plus précise que celle qu'on obtient à l'aide des paraboles précédemment envisagées. Nous allons donc essayer de développer les calculs à partir des relations (34) et (35).

1° L'équation différentielle de la trajectoire de Gauss (51) s'écrit

$$(176) \quad 4(mz^4 + nz^2 + p) \frac{d^2 r}{dz^2} + 2(4mz^3 + 2nz) \frac{dr}{dz} + (12mz^2 + 2n)r = 0.$$

Posons, pour abréger,

$$\lambda^2 = \frac{\Phi(z_0)}{\Phi(z_0) - \Phi(0)} \quad \text{et} \quad a = \frac{2\lambda}{1+\lambda},$$

et faisons le changement de variable $u = 1 - \frac{1}{1+\lambda} \left(\frac{z}{z_0}\right)^2$.

L'équation (176) devient alors

$$(177) \quad u(u-1)(u-a) \frac{d^2 r}{du^2} + \left[\frac{3}{2}u^2 - (1+a)u + \frac{a}{2} \right] \frac{dr}{du} + \left(\frac{3}{4}u - \frac{a+4}{8} \right) r = 0,$$

équation différentielle linéaire, du second ordre, du type fuchsien à quatre singularités régulières (0, 1, a et ∞), dont les solutions s'expriment par les fonctions de Heun [24] (généralisations des séries hypergéométriques)

$$(178) \quad r(u) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n u^n.$$

Les C_n satisfont dans notre cas aux relations de récurrence

$$(179) \quad \begin{cases} C_1 = \frac{a+4}{4a}; \\ a(n+1) \left(\frac{1}{2} + n \right) C_{n+1} \\ = \left[n^2(a+1) + \frac{a+4}{8} \right] C_n \\ - \left[(n-1)(n-2) + \frac{3}{2}(n-1) + \frac{3}{4} \right] C_{n-1}. \end{cases}$$

La série (178) est absolument convergente dans l'intervalle (0, 1) y compris les frontières.

2° Le coefficient de $\frac{d^2 r}{du^2}$ dans l'équation (177) étant un polynôme du troisième degré, il est indiqué d'introduire les fonctions elliptiques.

a. Soit $p(u)$ la fonction de Weierstrass satisfaisant à l'équation différentielle

$$(180) \quad p'^2 = 4(p-e_1)(p-e_2)(p-e_3),$$

avec

$$(181) \quad e_n = a_n - \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3),$$

a_1 , a_2 et a_3 étant les singularités de l'équation (177), c'est-à-dire

$$(182) \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = a.$$

Faisons le changement de variable

$$(183) \quad u = p(\xi) + \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3) = p(\xi) + \frac{1+a}{3}.$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{dr}{du} &= \frac{dr}{d\xi} \frac{1}{p'(\xi)}, \\ \frac{d^2 r}{du^2} &= \frac{d^2 r}{d\xi^2} \frac{1}{p'^2(\xi)} - \frac{dr}{d\xi} \frac{p''(\xi)}{p'^3(\xi)} \end{aligned}$$

et l'équation (180) s'écrit

$$\begin{aligned} & \left[p(\xi) + \frac{1+a}{3} \right] \left[p(\xi) + \frac{a-2}{3} \right] \\ & \times \left[p(\xi) + \frac{1-a}{3} \right] \left[\frac{d^2 r}{d\xi^2} \frac{1}{p'^2(\xi)} - \frac{dr}{d\xi} \frac{p''(\xi)}{p'^3(\xi)} \right] \\ & + \frac{1}{3} \left\{ 3 \left[p(\xi) + \frac{1+a}{3} \right]^2 - 2(1+a) \right. \\ & \quad \times \left[p(\xi) - \frac{1+a}{3} \right] + a \left\{ \frac{dr}{d\xi} \frac{1}{p'(\xi)} \right. \\ & \quad \left. \left. + \left\{ 3 \left[p(\xi) + \frac{1+a}{3} \right] - \frac{a+4}{8} \right\} r \right\} \right\} r = 0. \end{aligned}$$

En effectuant les calculs, on obtient

$$(184) \quad \left[\frac{d^2 r}{d\xi^2} + \left[3p(\xi) - \frac{2-a}{2} \right] r \right] = 0,$$

forme weierstrassienne de l'équation de Lamé.

b. Introduisons dans l'équation (177) la fonction elliptique

$$(185) \quad u = \operatorname{sn}^2 \xi$$

de module k :

$$(186) \quad k^2 = \frac{1}{a} = \frac{\lambda+1}{2\lambda}.$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\xi} &= 2 \operatorname{sn} \xi \operatorname{cn} \xi \operatorname{dn} \xi, \\ \frac{d^2 u}{d\xi^2} &= 2 \operatorname{cn}^2 \xi \operatorname{dn}^2 \xi - 2 \operatorname{sn}^2 \xi \operatorname{dn}^2 \xi - 2 k^2 \operatorname{sn}^2 \xi \operatorname{cn}^2 \xi \end{aligned}$$

et l'équation (177) devient

$$\begin{aligned} & -\operatorname{sn}^2 \xi \operatorname{cn}^2 \xi (\operatorname{sn}^2 \xi - a) \\ & \cdot \left(\frac{d^2 r}{d\xi^2} \frac{1}{4 \operatorname{sn}^2 \xi \operatorname{cn}^2 \xi \operatorname{dn}^2 \xi} \right. \\ & \quad \left. - \frac{dr}{d\xi} \frac{\operatorname{cn}^2 \xi \operatorname{dn}^2 \xi - \operatorname{sn}^2 \xi \operatorname{dn}^2 \xi - \lambda^2 \operatorname{sn}^2 \xi \operatorname{cn}^2 \xi}{4 \operatorname{sn}^3 \xi \operatorname{cn}^3 \xi \operatorname{dn}^3 \xi} \right) \\ & + [3 \operatorname{sn}^4 \xi - 2(1+a) \operatorname{sn}^2 \xi + a] \frac{dr}{d\xi} \frac{1}{4 \operatorname{sn} \xi \operatorname{cn} \xi \operatorname{dn} \xi} \\ & \quad - \left(\frac{3}{4} \operatorname{sn}^2 \xi - \frac{a-1}{8} \right) r = 0, \end{aligned}$$

soit, tous calculs faits

$$(187) \quad \left[\frac{d^2 r}{d\xi^2} + \left(3k^2 \operatorname{sn}^2 \xi - \frac{1+4k^2}{2} \right) r \right] = 0,$$

forme jacobienne de l'équation de Lamé.

3° Les équations (184) et (187) peuvent être établies d'une manière différente.

Écrivons directement les équations du mouvement de l'électron dans un plan méridien de la lentille

$$(188) \quad \begin{cases} q \frac{d^2 r}{dt^2} = e \frac{\partial \phi}{\partial r}, \\ \frac{1}{2} q \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right] = e \phi \end{cases}$$

(q , charge de l'électron; e , sa masse).

En prenant comme unité de temps la quantité $\sqrt{\frac{q}{2e}}$, ces équations s'écrivent dans l'approximation de Gauss

$$(189) \quad \begin{cases} \frac{dz}{dt} = \sqrt{\Phi(z)}, \\ \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{r}{4} \Phi''(z). \end{cases}$$

Il en résulte

$$(190) \quad t = \int_{-z_0}^z \frac{dz}{\sqrt{\Phi(z)}}.$$

Or

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= mz^4 + nz^2 + p \\ &= m(z - z_0 \sqrt{1+\lambda})(z + z_0 \sqrt{1+\lambda})[z^2 - (\lambda-1)z_0^2], \\ \Phi''(z) &= 12mz^2 + 2n. \end{aligned}$$

Posons

$$(191) \quad z = z_0 \sqrt{1+\lambda} \sqrt{1-u^2} \quad \text{et} \quad k^2 = \frac{\lambda+1}{2\lambda} = \frac{1}{a}.$$

En substituant dans (190) on trouve

$$(192) \quad -\sqrt{-2\lambda m} z_0 t = -\int_0^{\frac{1}{k\sqrt{2}}} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2 u^2)}} + \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2 u^2)}}.$$

$$\text{Remplaçons la constante } \int_0^{\frac{1}{k\sqrt{2}}} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2 u^2)}}$$

par α et passons des intégrales elliptiques aux fonctions inverses. La relation (192) s'écrit

$$(193) \quad u = \operatorname{sn}(\alpha - \sqrt{-2\lambda m} z_0 t) = \operatorname{sn} \xi.$$

Dès lors, le système (189) devient

$$\frac{d^2 r}{d\xi^2} + \left(3k^2 \operatorname{sn}^2 \xi - \frac{1+4k^2}{2} \right) r = 0,$$

soit, en effectuant les calculs,

$$\frac{d^2 r}{d\xi^2} + \left(3k^2 \operatorname{sn}^2 \xi - \frac{1+4k^2}{2} \right) r = 0.$$

On retrouve l'équation (187).

L'équation algébrique (177) et les formes à transcendances elliptiques (184) et (187) permettent de synthétiser, dans une seule relation (à la place des trois que nous avons écrites précédemment), l'ensemble des trajectoires gaussiennes de la lentille et du miroir. Malheureusement, les fonctions de Heun [solutions de (177)] et les fonctions de Lamé [solutions de (184) et de (187)], qui s'introduisent ainsi dans le calcul, sont très peu maniables. En particulier, il n'est pas possible d'établir des formules explicites pour les caractéristiques optiques de la lentille, telle que sa distance focale. Ainsi, en dépit de l'attrait théorique d'une représentation synthétique, il est plus indiqué, au point de vue pratique, de décomposer la quartique du potentiel en formes tangentes. Les fonctions de Lamé sont alors décomposées elles-mêmes en formes tangentes, fonctions trigonométriques d'arguments de fonctions hyperboliques et fonctions hyperboliques d'arguments de fonction trigonométriques. Ces deux dernières classes de fonctions se prêtent très bien au calcul et permettent d'aboutir, comme nous l'avons vu, à des formules relativement simples donnant les caractéristiques optiques du système en fonction de ses paramètres initiaux.

Théorie des lentilles à électrodes épaisses.

Dans tout ce qui précède nous avons supposé que les électrodes dont sont constituées les lentilles, étaient des plaques infiniment minces. Or, dans un grand nombre de cas pratiques, il n'en est pas ainsi. Nous allons donc essayer de généraliser nos calculs au cas des lentilles à électrodes épaisses. Nous continuerons toutefois à supposer que les électrodes extérieures restent minces et que, seule, l'épaisseur de l'électrode centrale est variable. Les raisonnements pourront être généralisés aux lentilles à électrodes extérieures épaisses, mais ce problème ne semble pas présenter d'intérêt pratique pour le moment.

Les formules que nous allons établir sont sensiblement plus compliquées que celles des lentilles présentant des électrodes minces, mais l'apparition

du nouveau paramètre que constitue l'épaisseur, montre que le constructeur disposera d'un degré de liberté supplémentaire pour la réalisation judicieuse de son appareillage électronique. Nous en donnerons quelques exemples dans la suite.

1° DISTRIBUTION DU POTENTIEL SUR L'AXE. — Soient (fig. 41) $2z_1$ l'épaisseur de l'électrode centrale et z_2 la distance des électrodes extérieures au plan de symétrie de la lentille; les autres symboles sont ceux de la figure 1.

Pour déterminer la distribution du potentiel sur l'axe, nous allons remplacer notre lentille réelle par une lentille fictive, composée de quatre électrodes

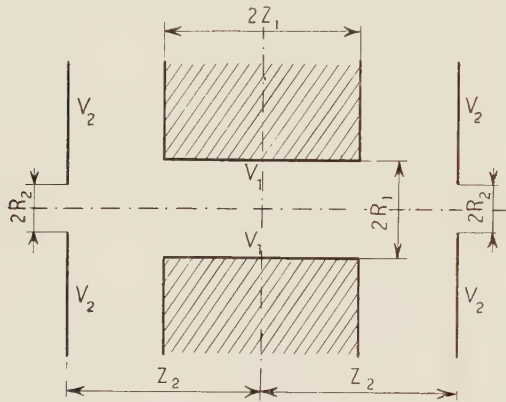


Fig. 41.

minces et symétriques deux à deux : deux électrodes situées à la distance z_1 du plan de symétrie et portées au potentiel V_1 et deux électrodes placées à la distance z_2 du plan de symétrie et portées au potentiel V_2 . Nous supposons encore que le potentiel sur l'axe résulte d'une association linéaire des potentiels produits par chaque électrode, considérée séparément. Dans ces conditions, la relation (12) peut être généralisée, et l'on obtient immédiatement, dans notre cas, l'expression symétrique

$$(194) \quad \Phi(z) = a + b \left[(z + z_2) \operatorname{arctg} \frac{z + z_2}{R_2} + (z - z_2) \operatorname{arctg} \frac{z - z_2}{R_2} - (z + z_1) \operatorname{arctg} \frac{z + z_1}{R_1} - (z - z_1) \operatorname{arctg} \frac{z - z_1}{R_1} \right].$$

Des formules analogues à celles que nous avons établies dans le cas des lentilles à électrodes minces

peuvent être dérivées ici. Lorsque $z_2 - z_1 \geq 3$ (cas général en pratique), on a

$$(195_1) \quad a = V_1 + (V_2 - V_1) \times \frac{2R_1 - 2R_2 + \pi(z_2 - z_1)}{\left\{ 2R_1 - \pi z_1 + (z_1 + z_2) \operatorname{arctg} \frac{z_1 + z_2}{R_1} + (z_2 - z_1) \operatorname{arctg} \frac{z_2 - z_1}{R_1} \right\}}$$

et

$$(195_2) \quad b = -(V_2 - V_1) \times \frac{1}{\left\{ 2R_1 - \pi z_1 + (z_1 + z_2) \operatorname{arctg} \frac{z_1 + z_2}{R_1} + (z_2 - z_1) \operatorname{arctg} \frac{z_2 - z_1}{R_1} \right\}}.$$

Le potentiel au centre s'écrit notamment

$$(196) \quad \Phi(0) = V_1 + (V_2 - V_1) \times \frac{2R_1 + 2z_1 \operatorname{arctg} \frac{z_1}{R_1} - \pi z_1}{\left\{ 2R_1 - \pi z_1 + (z_1 + z_2) \operatorname{arctg} \frac{z_1 + z_2}{R_1} + (z_2 - z_1) \operatorname{arctg} \frac{z_2 - z_1}{R_1} \right\}}$$

et celui à l'aplomb des électrodes extérieures devient

$$(197) \quad \Phi(z_2) = V_1 + (V_2 - V_1) \left[1 - \frac{R_2}{\left\{ 2R_1 - \pi z_1 + (z_1 + z_2) \operatorname{arctg} \frac{z_1 + z_2}{R_1} + (z_2 - z_1) \operatorname{arctg} \frac{z_2 - z_1}{R_1} \right\}} \right].$$

A titre d'application, nous avons calculé, par la formule (196), une série de lentilles d'épaisseur croissante, mesurées par H. Bruck [1]. Le tableau suivant condense les résultats :

TABLEAU XI. — Lentilles à électrode centrale épaisse.

$$V_1 = 0 \text{ V}, \quad V_2 = 100 \text{ V}, \quad 2R_2 = 50 \text{ mm}, \\ z_2 - z_1 = 100 \text{ mm}.$$

Lentille n°.	$2z_1$ (mm).	$2R_1$ (mm).	Potentiel au centre	
			déterminé à la cuve électro- lytique [1] [$\Phi(0)$ volts].	calculé d'après la relation (196) [$\Phi(0)$ volts].
VIII α . . .	0	64,4	20,6	20,4
»	26,9	100	20,8	19,8
» β . . .	46,3	127	20,8	21,8
» γ . . .	63,7	150	20,6	22,8
» δ	83,6	174	21,0	23,9

Signalons, d'autre part, que les deux relations

$$\lim_{R_1 \rightarrow 0} \Phi(0) = V_1, \quad \text{quelque soit } z_1$$

et

$$\lim_{R_1 \rightarrow \infty} \Phi(0) = V_2, \quad \text{quelque soit } z_1$$

sont bien vérifiées par la formule (196).

La figure 42 montre la variation du potentiel au centre en fonction de $\frac{z_2}{R_1}$ pour différentes valeurs du paramètre $\frac{z_1}{z_2}$. On voit que $\Phi(0)$ diminue rapidement

lorsque l'épaisseur de l'électrode centrale augmente. Les remarques que nous avons formulées dans la première Partie au sujet de la difficulté de mesurer correctement le potentiel $\Phi(0)$ au voisinage de zéro et la supériorité du procédé théorique dans ce domaine, s'appliquent *a fortiori* au cas des lentilles épaisses. Remarquons, d'autre part, que si l'on veut obtenir un $\Phi(0)$ très faible (pour réaliser de fortes convergences par exemple), on peut agir non seulement sur V_1 , V_2 et $\frac{z_1}{R_1}$, mais aussi, et d'une manière très commode, sur le rapport $\frac{z_1}{z_2}$.

La fonction $\Phi(z_2)$ peut être étudiée d'une façon analogue à celle que nous avons employée pour $\Phi(z_0)$. On constate notamment que lorsque R_2 est faible (cas général), le potentiel $\Phi(z_2)$ est sensiblement constant et voisin de V_2 .

Nous définirons encore le rapport

$$(198) \quad x = \frac{\Phi(0)}{\Phi(z_2)},$$

qui s'introduit dans l'intégration des trajectoires. En montage bipolaire, on a notamment

$$(199) \quad x_0 = \frac{2R_1 + 2z_1 \operatorname{arctg} \frac{z_1}{R_1} - \pi z_1}{\left(2R_1 - R_2 + (z_1 + z_2) \operatorname{arctg} \frac{z_1 + z_2}{R_1} \right) + (z_2 - z_1) \operatorname{arctg} \frac{z_2 - z_1}{R_1} - \pi z_1}.$$

La théorie qui vient d'être exposée permet de calculer le passage de la lentille en miroir. La condition de blocage $\Phi(0) \leq 0$ s'écrit, en vertu de (196)

$$(200) \quad \left(\frac{V_1}{V_2} \right)_{bl} \leq - \frac{2R_1 + 2z_1 \operatorname{arctg} \frac{R_1}{z_1} - \pi z_1}{\left((z_1 + z_2) \operatorname{arctg} \frac{z_1 + z_2}{R_1} \right) + (z_2 - z_1) \operatorname{arctg} \frac{z_2 - z_1}{R_1} - 2z_1 \operatorname{arctg} \frac{z_1}{R_1}}.$$

A titre d'application numérique, nous avons calculé par la formule (200) le rapport de blocage pour une

lentille de caractéristiques $z_1 = 1 \text{ mm}$, $z_2 = 4 \text{ mm}$, $R_1 = 2,5 \text{ mm}$, $R_2 = 0,5 \text{ mm}$. On trouve $\left(\frac{V_1}{V_2} \right)_{bl} = -0,34$ en bon accord avec la valeur expérimentale $-0,31 \pm 0,03$, mesurée par Mahl et Recknagel [25].

Pour le calcul pratique de la courbe du potentiel, il est commode d'introduire les rapports

$$(201) \quad \frac{z_2}{R_2} = \eta, \quad \frac{z_1}{R_1} = \mu, \quad \frac{z_1}{z_2} = \nu$$

et d'écrire la relation (194) sous la forme

$$(202) \quad \Phi(z) = A + B \left[\left(1 + \frac{z}{z_2} \right) \operatorname{arctg} \eta \left(1 + \frac{z}{z_2} \right) + \left(1 - \frac{z}{z_2} \right) \operatorname{arctg} \eta \left(1 - \frac{z}{z_2} \right) \right] + C \left[\left(1 + \frac{z}{z_1} \right) \operatorname{arctg} \mu \left(1 + \frac{z}{z_1} \right) + \left(1 - \frac{z}{z_1} \right) \operatorname{arctg} \mu \left(1 - \frac{z}{z_1} \right) \right],$$

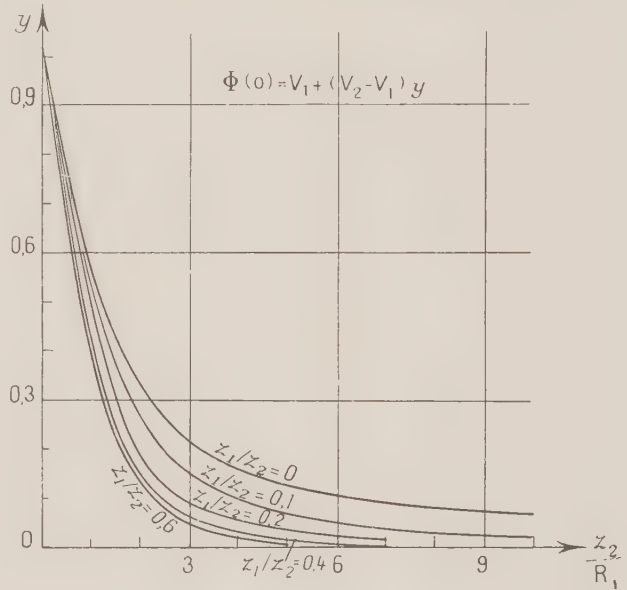


Fig. 42. — Variation de $\Phi(0)$ en fonction de $\frac{z_2}{R_1}$ pour différentes valeurs de $\frac{z_1}{z_2}$.

avec

$$(203) \quad \begin{cases} A = V_1 + (V_2 - V_1) \frac{\nu - \frac{2}{\eta\nu} + \pi \left(\frac{1}{\nu} - 1 \right)}{D}, \\ B = -\frac{C}{\nu}, \\ C = \frac{V_2 - V_1}{D}, \\ D = \frac{2}{\mu} + \left(\frac{1}{\nu} + 1 \right) \operatorname{arctg} \mu \left(\frac{1}{\nu} + 1 \right) + \left(\frac{1}{\nu} - 1 \right) \times \operatorname{arctg} \mu \left(\frac{1}{\nu} - 1 \right) - \pi. \end{cases}$$

La figure 43 montre la distribution du potentiel sur l'axe, calculée à l'aide des relations précédentes pour la famille de lentilles $\eta = 16$, $\mu = 4$, $\nu = 0,5$.

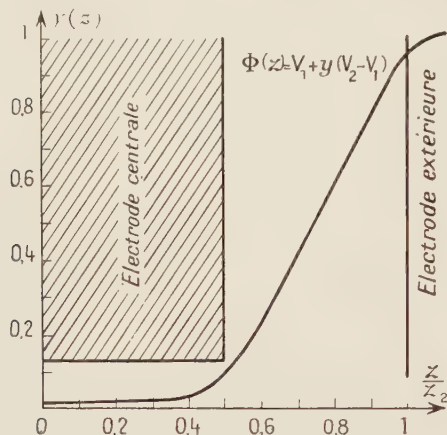


Fig. 43. — Potentiel sur l'axe dans la famille de lentilles

$$\frac{z_2}{R_2} = 16, \quad \frac{z_1}{R_1} = 4, \quad \frac{z_1}{z_2} = 0,5$$

2° INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DE LA TRAJECTOIRE. — Nous supposons pour commencer $\mu = \frac{z_1}{R_1} < 1$. Au voisinage de l'origine, on peut par conséquent écrire

$$\arctg \frac{z + z_1}{R_1} = \frac{z + z_1}{R_1} - \frac{(z + z_1)^3}{3R_1^3} + \dots$$

et une expression analogue pour $\arctg \frac{z_1 - z}{R_1}$. La

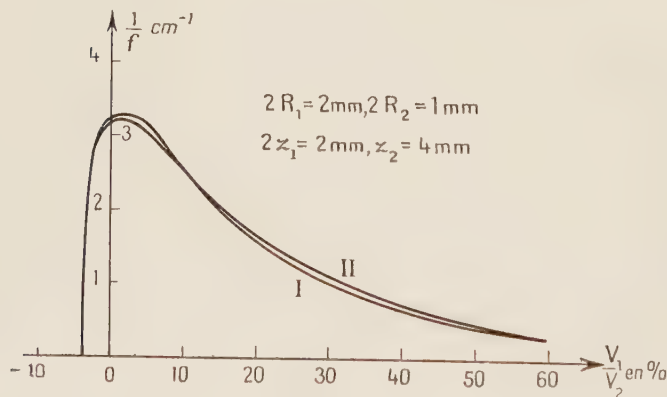


Fig. 44.

Courbe I : Pouvoir convergent mesuré par F. Heise et O. Rang [26].
Courbe II : Pouvoir convergent calculé d'après les relations (103) et (198).

relation (194) montre alors, qu'au voisinage de l'origine le potentiel présente une allure parabolique. Il en résulte que la théorie établie pour les lentilles

à électrodes minces reste intégralement valable, à condition de remplacer

$$x = \frac{\Phi(0)}{\Phi(z_0)} \quad \text{par} \quad x = \frac{\Phi(0)}{\Phi(z_2)}$$

[relation (198)]. En particulier, la distance focale de la lentille sera encore donnée par la formule (103).

A titre d'application, nous avons calculé par ce procédé deux lentilles mesurées par Heise et Rang [26]. Les figures 44 et 45 montrent l'accord entre la théorie ainsi établie et l'expérience.

Dans ce qui suit, nous supposons $\mu = \frac{z_1}{R_1} > 1$. L'équation (194) montre alors qu'au voisinage de

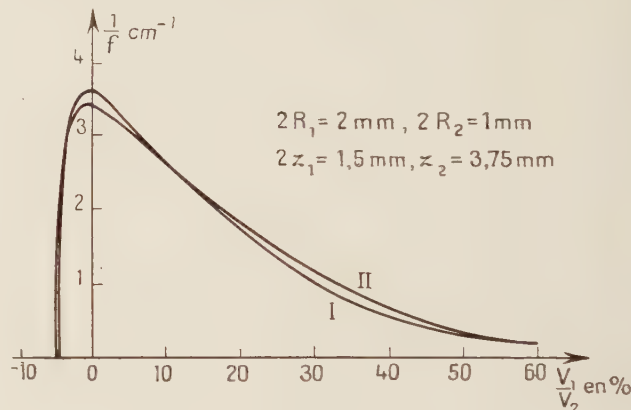


Fig. 45.

Courbe I : Pouvoir convergent mesuré par F. Heise et O. Rang [26].
Courbe II : Pouvoir convergent calculé d'après les relations (103) et (198).

l'origine, $\Phi(z)$ peut sensiblement être représenté par une droite. D'autre part, une double dérivation de la relation (194) montre que la demi-courbe du potentiel sur l'axe possède un point d'inflexion ζ , donné par

$$(204) \quad \frac{R_2^3}{[R_2^3 + (z_2 - \zeta)^2]^2} + \frac{R_2^3}{[R_2^3 + (z_2 - \zeta)^2]^2} = \frac{R_1^3}{[R_1^3 + (\zeta + z_1)^2]^2} + \frac{R_1^3}{[R_1^3 + (\zeta - z_1)^2]^2}$$

Pour effectuer l'intégration de la trajectoire, nous définirons dans la lentille une région centrale où le potentiel est linéaire, deux régions intermédiaires où le potentiel est parabolique avec $\Phi''(z) > 0$ et deux régions extérieures où le potentiel est encore parabolique avec $\Phi''(z) < 0$ (fig. 46). Soit ζ_1 la limite de la région centrale, c'est-à-dire l'abscisse du sommet de la première parabole. Le potentiel sur l'axe sera défini par

$$(205) \quad \begin{cases} \Phi_1(z) = \Phi(0) & \text{pour } 0 < |z| < \zeta_1, \\ \Phi_2(z) = \Phi(0) + p(z \pm \zeta_1)^2 & \text{pour } \zeta_1 < |z| < \zeta, \\ \Phi_3(z) = \Phi(z_2) + q(z \pm z_2)^2 & \text{pour } \zeta < |z| < z_2. \end{cases}$$

Posons

$$(206) \quad \begin{cases} \zeta_1 = k_1 z_2, \\ \zeta = k z_2. \end{cases}$$

Les équations

$$(207) \quad \begin{cases} \Phi_2(k z_2) = \Phi_3(k z_2), \\ \Phi'_2(k z_2) = \Phi'_3(k z_2) \end{cases}$$

fournissent

$$(208) \quad \begin{cases} p = \frac{1}{(1-k_1)(k-k_1)} \frac{\Phi(z_2) - \Phi(0)}{z_2^2}, \\ q = -\frac{1}{(1-k_1)(1-k)} \frac{\Phi(z_2) - \Phi(0)}{z_2^2}. \end{cases}$$

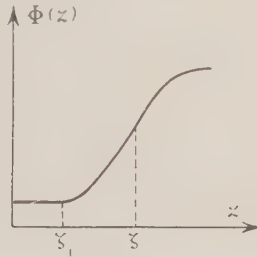


Fig. 46.

Les équations du rayon principal s'écrivent dès lors :

$$(209) \quad \begin{cases} r_1 = r_0 \operatorname{ch} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arcsin} \beta(z + z_2) \right] & \text{pour } -z_2 < z < -\zeta, \\ r_2 = A \cos \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arcsin} \alpha(z + \zeta_1) - \varphi \right] & \text{pour } -\zeta < z < -\zeta_1, \\ r_3 = E x z + F & \text{pour } -\zeta_1 < z < \zeta_1, \\ r_4 = A_1 \cos \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arcsin} \alpha(z - \zeta_1) - \varphi_1 \right] & \text{pour } \zeta_1 < z < \zeta, \\ r_5 = B \operatorname{sh} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arcsin} \beta(z - z_2) - \psi \right] & \text{pour } \zeta < z < z_2; \end{cases}$$

avec

$$(210) \quad \begin{cases} \alpha = \frac{1}{z_2} \sqrt{\frac{1}{(1-k_1)(k-k_1)}} \sqrt{\frac{1-x}{x}}, \\ \beta = \frac{1}{z_2} \sqrt{\frac{1}{(1-k_1)(1-k)}} \sqrt{1-x}. \end{cases}$$

Les huit relations

$$(211) \quad \begin{cases} r_1(-k z_2) = r_2(-k z_2), & r'_1(-k z_2) = r'_2(-k z_2); \\ r_2(-k_1 z_2) = r_3(-k_1 z_2), & r'_2(-k_1 z_2) = r'_3(-k_1 z_2); \\ r_3(k_1 z_2) = r_4(k_1 z_2), & r'_3(k_1 z_2) = r'_4(k_1 z_2); \\ r_4(k z_2) = r_5(k z_2), & r'_4(k z_2) = r'_5(k z_2) \end{cases}$$

permettent encore de déterminer les huit coefficients $A, \varphi, E, F, A_1, B, \varphi_1$ et ψ . En posant

$$(212) \quad \begin{cases} \lambda = \sqrt{\frac{k-k_1}{1-k}}, & \alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arcsin} \alpha(k-k_1) z_2, \\ \beta_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arcsin} \beta(1-k) z_2, \end{cases}$$

on trouve

$$(213) \quad \begin{cases} A^2 = r_0^2 (\operatorname{ch}^2 \beta_0 + \lambda^2 \operatorname{sh}^2 \beta_0), \\ \varphi = \operatorname{arctg} \lambda \operatorname{th} \beta_0 - \alpha_0, \\ E = \frac{\lambda z}{\sqrt{2}} \sin \varphi, \\ F = A \left(\cos \varphi + \frac{\alpha k_1 z_2}{\sqrt{2}} \sin \varphi \right), \\ A_1^2 = A^2 (1 + \sqrt{2} \alpha k_1 z_2 \sin 2\varphi + 2 \alpha^2 k_1^2 z_2^2 \sin^2 \varphi), \\ \varphi_1 = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2} \alpha k_1 z_2 + \cotg \varphi} \end{cases}$$

et suivant les valeurs de $K = \frac{1}{\lambda} \operatorname{tg}(\alpha_0 - \varphi_1)$,

$|K| < 1$:

$$(214) \quad \begin{cases} B^2 = A_1^2 \left[\cos^2(\alpha_0 - \varphi_1) - \frac{1}{\lambda^2} \sin^2(\alpha_0 - \varphi_1) \right], \\ \psi = \operatorname{arctg} \frac{1}{\lambda} \operatorname{tg}(\alpha_0 - \varphi_1) - \beta_0, \\ r_0 = \operatorname{ch} [\quad]; \end{cases}$$

$K > 1$:

$$(214_2) \quad \begin{cases} B^2 = A_1^2 \left[\frac{1}{\lambda^2} \sin^2(\alpha_0 - \varphi_1) - \cos^2(\alpha_0 - \varphi_1) \right], \\ \psi = \operatorname{arctg} \lambda \cotg(\alpha_0 - \varphi_1) - \beta_0, \\ r_0 = \operatorname{sh} [\quad]. \end{cases}$$

La discussion des coefficients et l'étude de la marche des rayons se font comme dans le cas des lentilles minces. Toutefois, deux régions oscillatoires apparaissent ici, séparées par une zone où la fonction $r(z)$ est linéaire. Cherchons, par exemple, les racines de $r_4(z) = 0$. Elles sont données par

$$(215) \quad z = \zeta_1 + z_2 \sqrt{(1-k_1)(k-k_1)} \times \sqrt{\frac{x}{1-x}} \operatorname{sh} \left[\varphi_1 \sqrt{2 + (2n-1) \frac{\pi}{\sqrt{2}}} \right].$$

On voit que pour une valeur donnée de x , l'abscisse du point d'intersection sera plus grande que dans le cas des lentilles minces. En d'autres termes, il sera plus difficile ici de faire effectuer des oscillations multiples aux rayons : pour obtenir des images d'ordre supérieur (images produites par des rayons ayant intercepté deux, trois, ... fois l'axe), il sera avantageux de réaliser des lentilles à électrodes centrales minces.

3° ÉTUDE DES PROPRIÉTÉS OPTIQUES. — Le calcul de la distance focale des lentilles à électrode centrale épaisse est fait en appendice. On trouve, pour le pouvoir convergent l'expression

$$(216) \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2},$$

avec

$$(217) \quad \frac{1}{f_1} = \frac{\beta}{\lambda \sqrt{2}} (\operatorname{ch}^2 \beta_0 + \lambda^2 \operatorname{sh}^2 \beta_0) \times \sin \left(2\alpha_0 - \operatorname{arctg} \frac{2\lambda \operatorname{th} \beta_0}{1 - \lambda^2 \operatorname{th}^2 \beta_0} \right),$$

$$(218) \quad \frac{1}{f_2} = -\frac{\alpha_0 k_1 z_2}{\lambda} \cos^2 \alpha_0 \operatorname{ch}^2 \beta_0 (\operatorname{tg} \alpha_0 - \lambda \operatorname{th} \beta_0)^2.$$

On voit ainsi qu'au point de vue des pouvoirs convergents, la lentille électrostatique indépendante à électrode centrale épaisse peut être considérée comme un système de deux lentilles minces accolées.

L'analogie de forme entre les relations (217) et (170) montre que le terme $\frac{1}{f_1}$ correspond au pouvoir convergent de la lentille à électrodes minces. Ce terme présente toujours une structure oscillatoire et peut, par conséquent, être positif ou négatif suivant les valeurs de x .

Le terme $\frac{1}{f_2}$ peut s'écrire sous la forme

$$(219) \quad \frac{1}{f_2} = -\frac{1}{f_{20}} \cos^2 \alpha_0 \operatorname{ch}^2 \beta_0 (\operatorname{tg} \alpha_0 - \lambda \operatorname{th} \beta_0)^2,$$

avec

$$(220) \quad \frac{z_2}{f_{20}} = \frac{k_1(1-x)}{(1-k_1)(k-k_1)\sqrt{x}}.$$

L'inspection des relations (219) et (220) montre que :

$\alpha. \frac{1}{f_2}$ est toujours négatif. Il en résulte que dans les régions où $\frac{1}{f_1}$ est positif, les distances focales seront augmentées par rapport à celles des lentilles minces. Par contre, dans les régions où $\frac{1}{f_1}$ est négatif, les pouvoirs convergents seront augmentés (en valeur absolue) par rapport à ceux de la lentille mince.

En particulier, dans la zone de fonctionnement d'ordre 1 (zone normale de fonctionnement), $\frac{1}{f}$ diminuera pour une augmentation d'épaisseur, tandis que dans la zone de fonctionnement d'ordre 2, $\frac{1}{f}$ augmentera (en valeur absolue) avec l'épaisseur.

$\frac{1}{f_2}$ est nul pour $\operatorname{tg} \alpha_0 = \lambda \operatorname{th} \beta_0$. Les racines de cette équation sont toutefois très petites : $x \leq 10^{-4}$.

β . L'influence du terme dû à l'épaisseur sera d'autant plus importante que l'épaisseur elle-même sera plus forte.

γ . L'influence du terme dû à l'épaisseur est généralement négligeable pour x voisin de 1. En particulier, les lentilles fortement dévoltées et les lentilles à grand rayon central auront sensiblement la même distance focale, quelle que soit leur épaisseur.

δ . Par contre, pour les faibles valeurs de x , le terme $\frac{1}{f_2}$ pourra devenir prépondérant, notamment pour les épaisseurs importantes. On pourra obtenir ainsi des convergences très nettement supérieures à celles que la théorie de la lentille mince permet de prévoir.

ε . Pratiquement, il sera d'autant plus difficile de réaliser des images d'ordre supérieur que l'épaisseur de l'électrode centrale sera plus forte. A partir d'une certaine épaisseur, il sera impossible d'obtenir des images d'ordre 3.

Toutes ces conclusions sont très bien vérifiées par le relevé expérimental des courbes $\frac{1}{f}$ [26].

Le calcul de l'abscisse du foyer ainsi que la détermination du plan principal (image) s'effectuent par des méthodes analogues à celles exposées dans le cas des lentilles à électrodes minces. On trouve (voir Appendice II) :

$$(221) \quad \frac{z_F}{z_2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2} \beta z_2} \frac{\sqrt{2} \alpha k_1 z_2}{\sqrt{2} \alpha k_1 z_2 M + N},$$

$$(222) \quad \frac{z_P}{z_2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2} \beta z_2} \frac{\sqrt{2} \alpha k_1 z_2 (I + J - 2\lambda)}{\sqrt{2} \alpha k_1 z_2 M + N},$$

avec

$$(223) \quad I = (\sin^2 \alpha_0 - \lambda^2 \cos^2 \alpha_0) \operatorname{sh} \left(2\beta_0 - \operatorname{arctg} \frac{2\lambda \operatorname{tg} \alpha_0}{\lambda^2 + \operatorname{tg}^2 \alpha_0} \right),$$

$$(224) \quad J = \sqrt{4\lambda^2 + (\lambda^2 + 1)^2 \operatorname{sh}^2 2\beta_0} \times \sin \left(2\alpha_0 + \operatorname{arctg} \frac{2\lambda}{\lambda^2 - 1} \coth 2\beta_0 \right),$$

$$(225) \quad M = \frac{f_{20}}{f_2},$$

$$(226) \quad N = \frac{\lambda \sqrt{2}}{\beta f_1}.$$

Pour le calcul numérique des caractéristiques optiques de la lentille, on peut supposer, avec une bonne approximation

$$(227) \quad \zeta_1 = \frac{z_1}{2}, \quad \zeta = z_1 + \frac{2}{3}(z_2 - z_1).$$

soit

$$(228) \quad k_1 = \frac{\nu}{2}, \quad k = \frac{2}{3} + \frac{\nu}{3}, \quad \nu = \frac{z_1}{z_2}.$$

On a alors

$$(229) \quad \lambda = \sqrt{\frac{4-\nu}{2(1-\nu)}},$$

$$(230) \quad \alpha z_2 = \sqrt{\frac{12}{(2-\nu)(4-\nu)}} \sqrt{\frac{1-x}{x}},$$

$$(231) \quad \beta z_2 = \sqrt{\frac{6}{(2-\nu)(1-\nu)}} \sqrt{1-x},$$

$$(232) \quad \alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arsh} \sqrt{\frac{4-\nu}{3(2-\nu)}} \sqrt{\frac{1-x}{x}},$$

$$(233) \quad \beta_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{3(2-\nu)}} \sqrt{1-x},$$

$$(234) \quad \frac{z_2}{f_{20}} = \frac{6\nu(1-x)}{(2-\nu)(4-\nu)} \sqrt{\frac{1}{x}}.$$

Les figures 47 et 48 montrent le réseau des courbes $\frac{z_2}{f}$ en fonction de x pour différentes valeurs du paramètre ν . L'accord entre la théorie et l'expérience [26] est mis en évidence sur la figure 49 ⁽¹⁾.

La figure 50 donne les valeurs maxima de $\frac{z_2}{f}$ en fonction de ν , dans la première zone de fonctionnement ($\frac{1}{f} > 0$). Sur la même figure, on a porté les valeurs de x qui correspondent à ces maxima.

4° APPLICATIONS. — Nous avons vu que le maximum de la courbe de convergence $\frac{1}{f}$ ou le

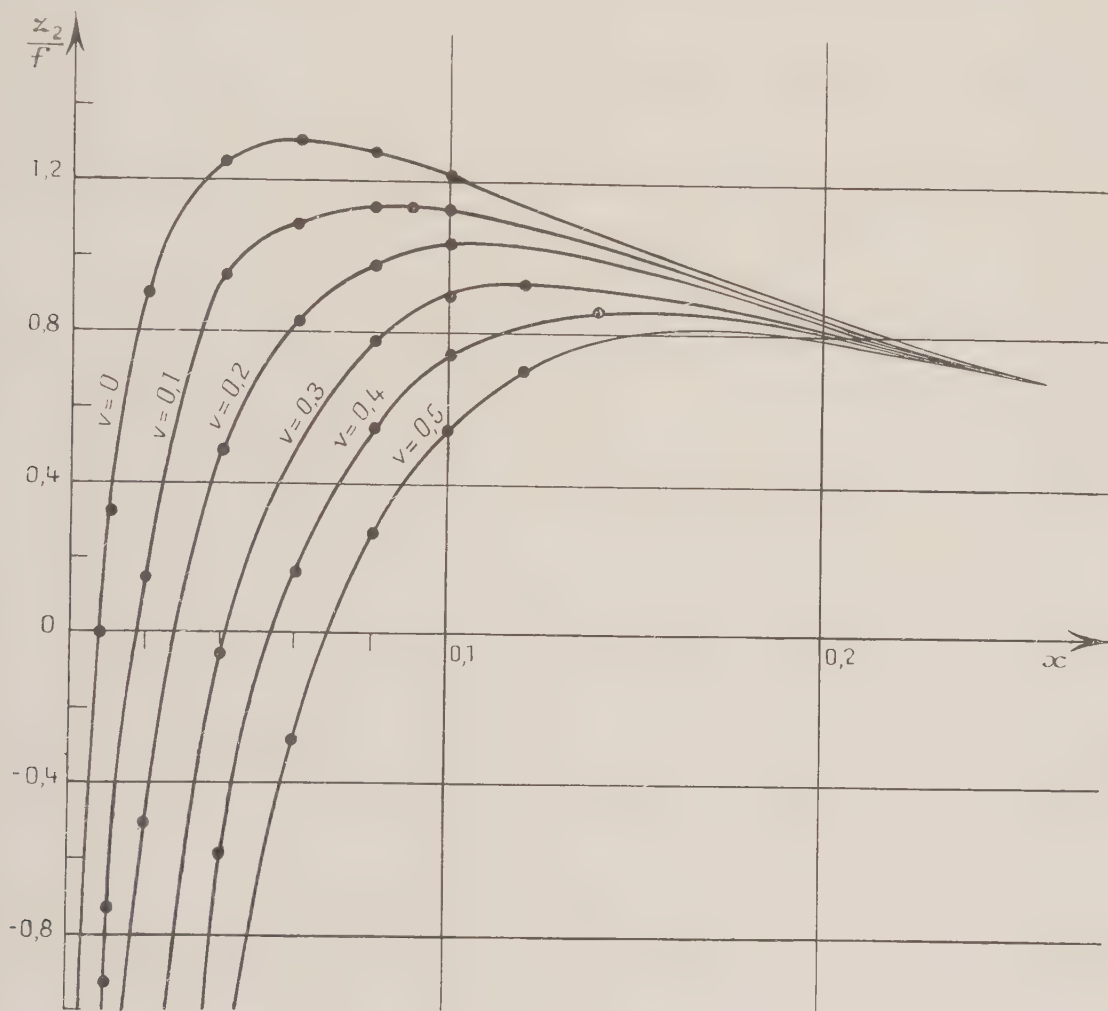


Fig. 47.

Toutes les quantités figurant dans les expressions de f , de z_F et de z_P sont ainsi exprimées en fonction du paramètre fondamental $x = \frac{\Phi(0)}{\Phi(z_2)}$ et du paramètre caractéristique de l'épaisseur $\nu = \frac{z_1}{z_2}$.

minimum de la courbe des distances focales $f = f(x)$ (fig. 20) constitue un point de fonctionnement remar-

⁽¹⁾ Ces courbes ont été calculées par M^{lle} Marianne Gaurial. Je lui exprime ici mes remerciements.

quable puisque les aberrations de sphéricité, d'ellipticité et de distorsion y sont minima. La théorie que nous venons d'exposer permet de prédéterminer ce point de fonctionnement en mettant en jeu le paramètre « épaisseur ».

a. Objectif optimum. — Dans la lentille à électrodes minces, la distance focale minimum est

prendrons $f = 1,30 z_2$, ce qui correspond (fig. 50) à $\nu = 0,6$. D'autre part, des raisons de rigidité électrique imposent $z_2 - z_1 \geq 3$ mm. Les deux relations $\frac{z_1}{z_2} = 0,6$ et $z_2 - z_1 = 3$ fournissent $z_1 = 4,5$ mm, $z_2 = 7,5$ mm. En montage unipotentiel ($V_1 = 0$), il ne reste plus qu'à déterminer R_1 et R_2 , reliés par la formule (199), où $x_0 = 0,20$ (fig. 50). Pour obtenir

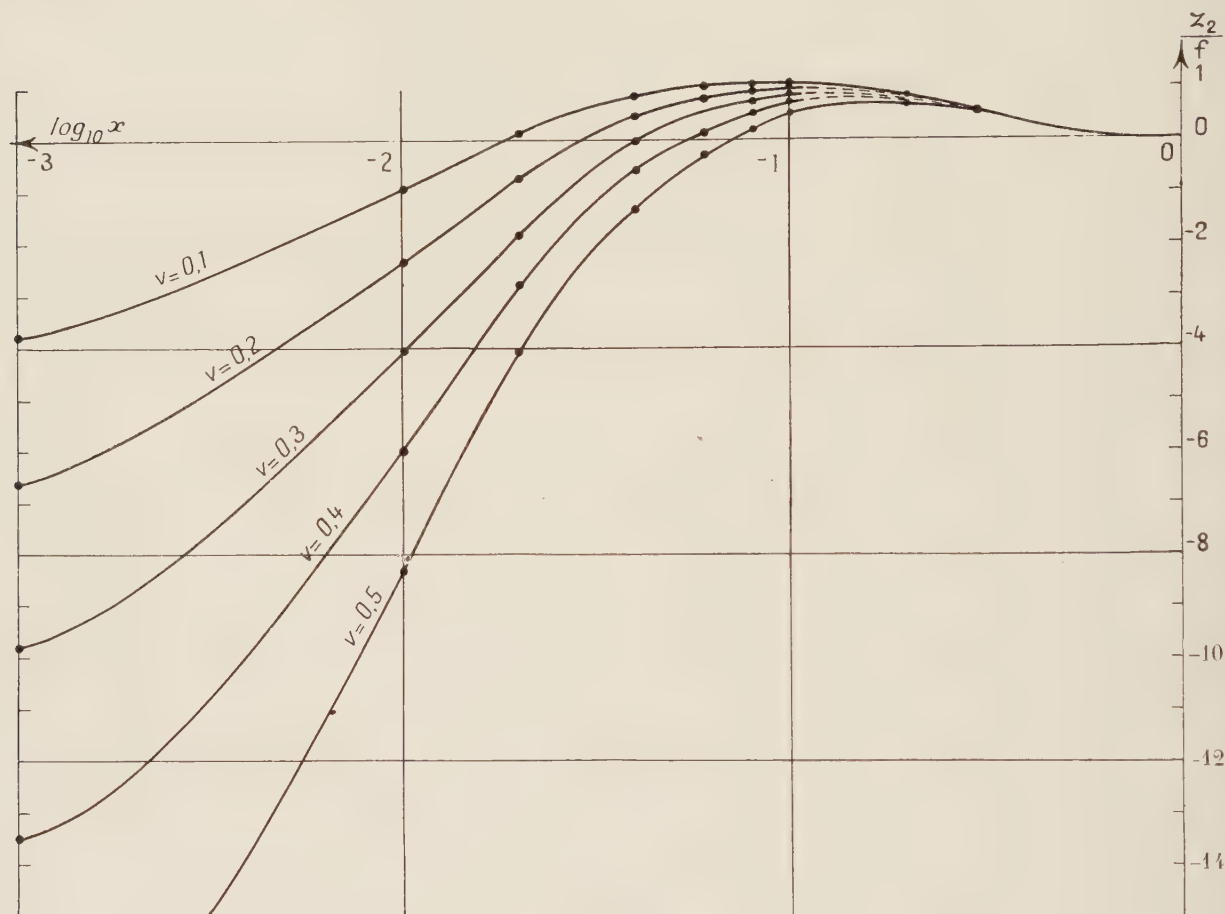


Fig. 48.

donnée par $f_{\min} \cong 0,77 z_0$. Le foyer correspondant n'est jamais accessible puisqu'il est situé à l'intérieur de la lentille. Il en est de même pour la lentille à électrodes épaisses tant que $R_1 > z_1$. Par contre, lorsque $R_1 < z_1$, la figure 50 montre que $f_{\min}$ peut être supérieur à z_2 . Il faut, à cet effet, que $\nu > 0,20$. Dans ce cas, le foyer correspondant au point de fonctionnement optimum recule à l'extérieur de la lentille et devient parfaitement accessible [27].

A titre d'application numérique, nous allons calculer un objectif de ce genre. Pour placer le foyer optimum nettement en dehors de la lentille, nous

des valeurs raisonnables pour R_2 , on est obligé de prendre R_1 aussi voisin que possible de z_1 . Par exemple pour $R_1 = 0,97 z_1$, on trouve $R_1 = 4,37$ mm, $R_2 = 1,9$ mm. L'objectif est ainsi entièrement déterminé. La distance focale sera de 9,8 mm environ.

b. Lentille de projection optimum. — Le but poursuivi ici est la réduction des aberrations de distorsion. Nous avons vu que dans la lentille à électrode centrale mince, le problème pouvait être résolu, soit par une polarisation négative convenable de l'électrode centrale, soit, en montage unipotentiel, par

augmentation du rapport $\frac{z_0}{R_1}$. Les deux solutions ont des inconvénients, la première affecte la rigidité électrique de la lentille, la deuxième conduit à des rapports $\frac{z_0}{R_1}$ exagérément grands. L'utilisation du

pour les lentilles à électrode centrale épaisse, lorsque $R_1 > z_1$. Dans ce cas, $x = 0,058$. Si, par ailleurs, on prend $\nu = \frac{z_1}{z_2} = 0,2$ et $z_2 = z_1 = 3,5$, on aura $z_1 = 0,88$ mm, $z_2 = 4,38$ mm. La relation (199), applicable en régime unipotentiel, est

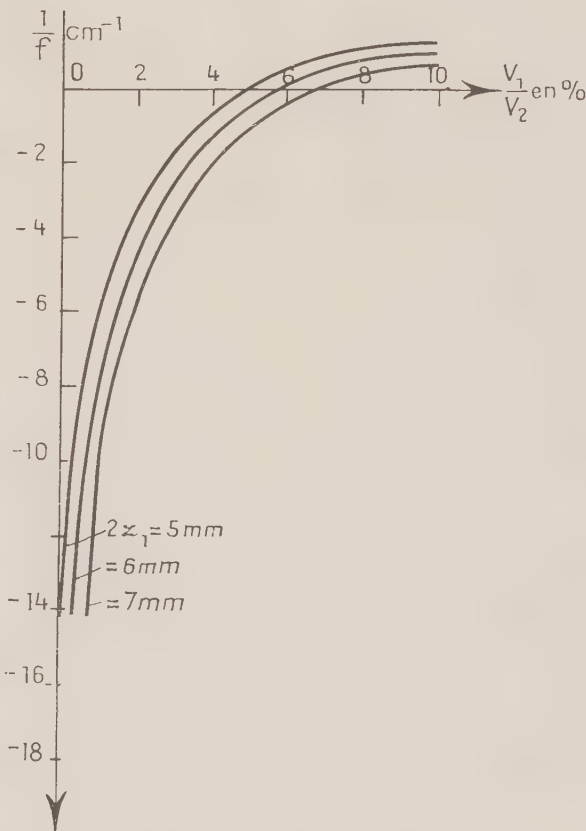
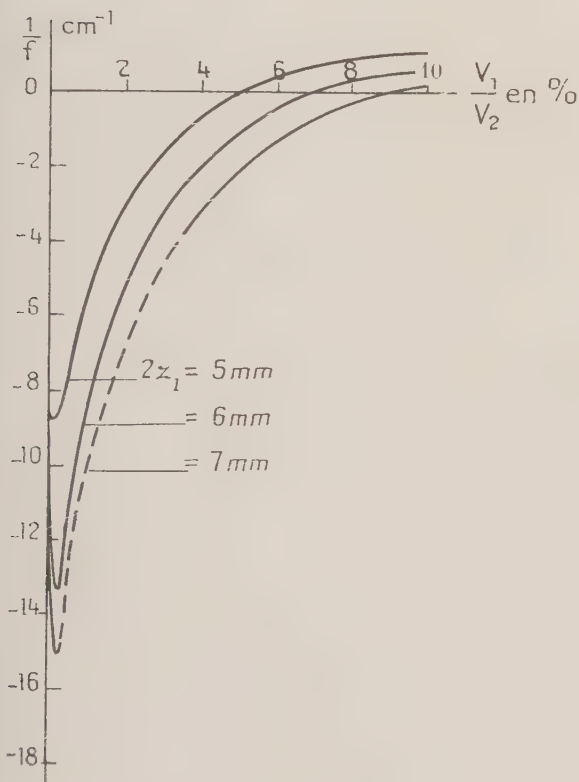
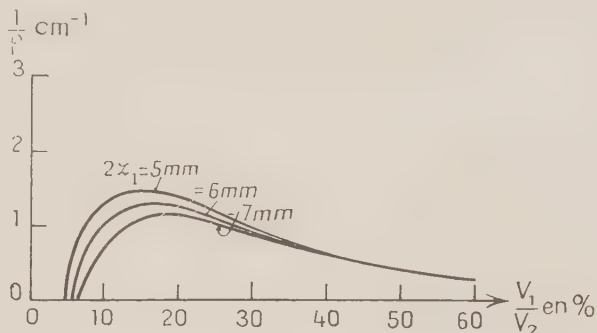
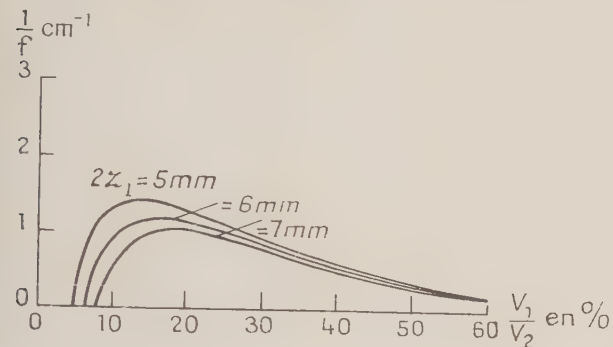


Fig. 49 A. — Courbes $\frac{1}{f}$ relevées expérimentalement par F. Heise et O. Rang [26].

Fig. 49 B. — Courbes $\frac{1}{f}$ calculées.

paramètre « épaisseur » apporte une solution plus élégante.

Ici, on n'a pas intérêt à placer le foyer en dehors de la lentille. Au contraire, pour réaliser des grossissements aussi forts que possible, on prendra la distance focale minimum $f_{min} = 0,77 z_2$, valable

alors satisfaite pour $R_1 = 1,08$ mm, $R_2 = 0,71$ mm. La distance focale sera $f = 3,38$ mm.

La lentille de projection ainsi déterminée ne diffère que très peu de la projective habituelle. On voit que l'emploi d'épaisseurs même modérées est susceptible de produire ici le même effet que

l'augmentation (en valeur absolue) du rapport $\frac{V_1}{V_2}$ ou du rapport $\frac{\omega_0}{R_1}$.

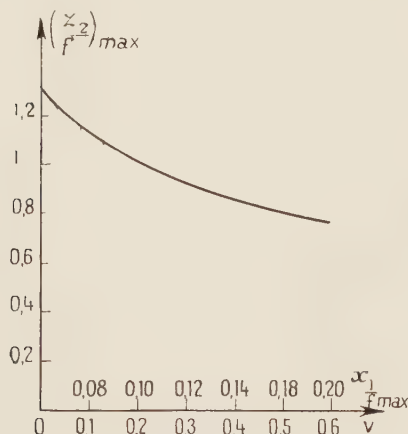


Fig. 50.

TROISIÈME PARTIE.

LE SYSTÈME LENTILLE-MIROIR EN RÉGIME TRANSGAUSSIEN.

Généralités.

Dans l'étude que nous avons effectuée jusqu'ici, nous avons envisagé uniquement les rayons principaux de Gauss, c'est-à-dire nous avons admis que la distance à l'axe r_0 du rayon incident parallèle était négligeable par rapport aux dimensions de la lentille; nous avons admis, en outre, que les quantités r^2 et r'^2 étaient négligeables par rapport à r et r' .

La théorie que nous avons établie pour les rayons paraxiaux permet de déterminer par le calcul tous les éléments du premier ordre de la lentille en fonction de ses paramètres géométriques et électriques. Toutefois, dans un grand nombre de cas, les rayons incidents ne chemineront pas nécessairement au voisinage de l'axe, et, d'autre part, les quantités r^2 et r'^2 ne seront plus négligeables par rapport à r et r' . Nous appellerons « transgaussiens » de tels rayons et nous allons essayer d'établir la théorie du régime ainsi défini.

Il semblerait que la considération du coefficient d'aberration sphérique réponde à la question lorsqu'on a établi la marche des rayons gaussiens. En réalité, lorsque l'incidence $\frac{r_0}{\omega_0}$ est assez forte pour faire effectuer aux rayons des oscillations multiples et, à plus forte raison, lorsqu'il existe dans la lentille une zone fonctionnant en miroir, la simple

introduction du coefficient d'aberration sphérique ne semble pas adéquate à décrire correctement les phénomènes.

En effet, dans le calcul de l'aberration, on admet pour la distance du rayon à l'axe une expression de la forme $r + \Delta r$, avec Δr petit devant r . On porte ensuite cette expression dans l'équation générale de la trajectoire on en déduit Δr . Or, l'hypothèse $\Delta r \ll r$ n'est pas justifiée lorsqu'on approche du régime oscillatoire et *a fortiori* du passage en miroir.

C'est pourquoi nous conduirons le calcul en partant de l'équation générale de la trajectoire de l'électron dans un système de révolution

$$(235) \quad 2\phi(z, r) = (1 + r'^2) \left[\frac{\partial \phi(z, r)}{\partial r} - r' \frac{\partial \phi(z, r)}{\partial z} \right].$$

Nous tiendrons donc compte des termes en r^2 et r'^2 , mais nous admettrons toutefois que dans le développement de $\phi(z, r)$, en série entière à partir de l'équation de Laplace, les termes en r^4 et suivants sont négligeables. Les résultats fournis par ce procédé sont très bien vérifiés par l'expérience, sauf au voisinage des électrodes.

On peut se faire une idée qualitative de la marche des rayons électroniques dans un système fonctionnant en régime transgaussien en considérant par exemple une lentille dont l'électrode centrale est légèrement négative par rapport à la cathode. Les rayons cheminant au voisinage de l'axe seront entièrement décrits par la théorie des rayons paraxiaux. Par contre, lorsque r_0 croît, l'électron rencontrera, dans la région centrale de la lentille, des régions où le potentiel est de plus en plus négatif. Il effectuera alors des oscillations dont le nombre augmentera avec r_0 . A partir d'une certaine valeur limite de r_0 , le potentiel négatif de la région centrale de la lentille sera assez fort pour faire rebrousser chemin à l'électron. Pour $r_0 > r_{0l}$, le système agira donc en miroir, convergent d'abord, divergent pour des valeurs encore plus fortes de r_0 . Dans ce raisonnement nous supposons, bien entendu, que la lentille fonctionne sans diaphragme et que le rayon R_2 des électrodes extérieures est assez grand pour permettre le passage des rayons transgaussiens.

Nous allons préciser quantitativement ce phénomène par une généralisation des calculs antérieurs.

Équation des trajectoires transgaussiennes.

Nous supposons ici que la lentille est constituée d'électrodes minces et définirons comme précédemment le point d'inflexion de la courbe de potentiel sur l'axe par $\zeta = kz_0$ (pratiquement $k \cong \frac{2}{3}$).

Pour effectuer les calculs, nous distinguerons plusieurs cas suivant la distance à l'axe r_0 du rayon incident et la valeur du rayon limite r_{0l} .

a. $r_0 < r_{0l}$. — Dans cette zone, le système fonctionne comme lentille. On a, en vertu de nos hypothèses

$$(236) \quad \phi(z, r) = \Phi(z) - \frac{r^2}{2} \Phi''(z),$$

avec

$$(237) \quad \begin{cases} \Phi(z) = \Phi(0) + p z^2 & \text{pour } 0 < |z| < k z_0; \\ \Phi(z) = \Phi(z_0) + q (z \pm z_0)^2 & \text{pour } k z_0 \leq |z| \leq z_0. \end{cases}$$

$$(238) \quad \begin{cases} p = \frac{1}{k} \frac{\Phi(z_0) - \Phi(0)}{z_0^2}, \\ q = \frac{1}{k-1} \frac{\Phi(z_1) - \Phi(0)}{z_0^2}. \end{cases}$$

L'équation (235) s'écrit alors dans la région d'incidence :

$$(239) \quad \left[\frac{2}{\beta^2} - 2(z - z_0)^2 + r^2 \right] r'' = (1 + r'^2) [r + 2(z + z_0)r'];$$

dans la région centrale :

$$(237_2) \quad \left(\frac{2}{\alpha^2} - 2z^2 + r^2 \right) r'' = (1 + r'^2) (r + 2zr');$$

dans la région d'émergence :

$$(237_3) \quad \left[\frac{2}{\beta^2} - 2(z - z_0)^2 + r^2 \right] r'' = (1 + r'^2) [r + 2(z - z_0)r'];$$

avec

$$(238) \quad \begin{cases} \alpha = \sqrt{\frac{p}{\Phi(0)}} = \frac{1}{z_0} \sqrt{\frac{1}{k} \left(\frac{1-x}{x} \right)}, \\ \beta = \sqrt{-\frac{q}{\Phi(z_0)}} = \frac{1}{z_0} \sqrt{\frac{1}{1-k} (1-x)}. \end{cases}$$

Pour résoudre, par exemple l'équation (237₂), nous admettons — en généralisant les formules obtenues dans le cas gaussien — pour r une expression de la forme

$$(239) \quad r = A \cos \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arcsch} \gamma z - \varphi \right).$$

On a, par conséquent,

$$(240) \quad r' = - \frac{\gamma A}{\sqrt{2(1+\gamma^2 z^2)}} \sin \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arcsch} \gamma z - \varphi \right)$$

et

$$(241) \quad r'' = - \frac{\gamma^2 A}{2(1+\gamma^2 z^2)} \cos \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arcsch} \gamma z - \varphi \right) + \frac{\gamma^3 A z}{(1+\gamma^2 z^2)\sqrt{2(1+\gamma^2 z^2)}} \sin \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arcsch} \gamma z - \varphi \right).$$

L'équation (237₂) s'écrit alors, en omettant, pour simplifier l'écriture, l'argument des fonctions trigonométriques

$$(242) \quad \begin{aligned} & \frac{\gamma^2}{2} \left(\frac{2}{\alpha^2} - 2z^2 + A^2 \cos^2 \right) \\ & \times (\sqrt{1+\gamma^2 z^2} \cos - \sqrt{2} \gamma z \sin) \\ & = \left(1 + \gamma^2 z^2 + \frac{\gamma^2 A^2}{2} \sin^2 \right) \\ & \times (\sqrt{1+\gamma^2 z^2} \cos - \sqrt{2} \gamma z \sin). \end{aligned}$$

Si nous supposons $\sqrt{1+\gamma^2 z^2} \cos - \sqrt{2} \gamma z \sin \neq 0$ l'équation (242) est satisfaite pour

$$r^2 = \frac{2 z^2}{2 + A^2 z^2}.$$

Des calculs semblables peuvent être effectués dans les régions d'incidence et d'émergence.

En résumé, la résolution des équations (237₁), (237₂) et (237₃) fournit pour un rayon initialement parallèle à l'axe :

Région d'incidence :

$$(243_1) \quad r_1 = r_0 \operatorname{ch} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arcsin} (z + z_0) \sqrt{\frac{2 \beta^2}{2 + r_0^2 \beta^2}} \right];$$

Région centrale :

$$(243_2) \quad r_2 = A \cos \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arcsch} z \sqrt{\frac{2 z^2}{2 - A^2 z^2}} - \varphi \right];$$

Région d'émergence :

$$(243_3) \quad r_3 = B \operatorname{ch} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arcsin} (z - z_0) \sqrt{\frac{2 \beta^2}{2 + B^2 \beta^2}} - \psi \right].$$

b. $r_0 > r_{0l}$. — Dans cette zone, l'appareil agit comme miroir. Le système (243) doit être remplacé par

$$(244) \quad \begin{cases} r_1 = r_0 \operatorname{ch} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arcsin} (z + z_0) \sqrt{\frac{2 \beta^2}{2 + r_0^2 \beta^2}} \right], \\ r_2 = A \cos \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arcsch} z \sqrt{\frac{2 z^2}{A^2 z^2 - 2}} - \varphi \right], \\ r_3 = B \operatorname{ch} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arcsin} (z - z_0) \sqrt{\frac{2 \beta^2}{2 + B^2 \beta^2}} - \psi \right]. \end{cases}$$

c. r_{0l} imaginaire. — En d'autres termes, le système fonctionne déjà en miroir dans l'approximation de Gauss.

Tant que la réflexion de l'électron a lieu dans la région centrale, les équations établies en b restent valables à condition d'y remplacer α par

$$\alpha' = \alpha z = \frac{1}{z_0} \sqrt{\frac{1}{k} \frac{x-1}{x}}.$$

Dans le cas où la tension négative de l'électrode centrale est assez forte pour que la réflexion de l'électron ait lieu dans la région d'incidence même, les équations de la trajectoire transgaussienne sont :

à l'incidence :

$$(245_1) \quad r = r_0 \operatorname{ch} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin(z + z_0) \sqrt{\frac{2\beta_1^2}{2 + r_0^2 \beta_1^2}} \right];$$

à l'émergence :

$$(245_2) \quad r = B \operatorname{ch} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\pi - \arcsin(z + z_0) \sqrt{\frac{2\beta_1^2}{2 + B^2 \beta_1^2}} \right] \right\}.$$

On voit que les formules trouvées sont analogues à celles obtenues pour le système lentille-miroir dans le cas de l'approximation de Gauss, mais plus compliquées. Les arguments des fonctions dépendent notamment de l'incidence $\frac{r_0}{z_0}$.

Détermination des coefficients et tracé des trajectoires.

Le calcul des coefficients A, B, φ et ψ est fait en Appendice. Nous donnons ici le résultat

a. $r_0 < r_0'$. — On a

$$(246) \quad \begin{cases} A^2 = r_0'^2 (\operatorname{ch}^2 \beta_1 + \lambda_1^2 \operatorname{sh}^2 \beta_1), \\ \varphi = \arctg \lambda_1 \operatorname{th} \beta_1 - \alpha_0, \end{cases}$$

et suivant les valeurs de $K = \frac{1}{\lambda_1^2} \operatorname{tg}(\alpha_0 - \varphi)$:

|K| < 1 :

$$(247) \quad \begin{cases} B^2 = A^2 \left[\cos^2(\alpha_0 - \varphi) - \frac{1}{\lambda_1^2} \sin^2(\alpha_0 - \varphi) \right], \\ \psi = \operatorname{arcth} \frac{1}{\lambda_1} \operatorname{tg}(\alpha_0 - \varphi) - \beta_1, \\ r_0 = B \operatorname{ch}[\quad]; \end{cases}$$

K > 1 :

$$(247_1) \quad \begin{cases} B^2 = A^2 \left[\frac{1}{\lambda_1^2} \sin^2(\alpha_0 - \varphi) - \cos^2(\alpha_0 - \varphi) \right], \\ \psi = \operatorname{arcth} \lambda_1 \operatorname{cotg}(\alpha_0 - \varphi) - \beta_1, \\ r_0 = B \operatorname{sh}[\quad]. \end{cases}$$

b. $r_0 > r_0'$. — On a

$$(246') \quad \begin{cases} A^2 = r_0'^2 (\operatorname{ch}^2 \beta_1 + \lambda_1^2 \operatorname{sh}^2 \beta_1), \\ \varphi = \alpha_0' - \arctg \lambda_1 \operatorname{th} \beta_1, \end{cases}$$

et suivant les valeurs de $K' = \frac{1}{\lambda_1'^2} \operatorname{tg}(\alpha_0' + \varphi)$:

|K'| < 1 :

$$(247_1') \quad \begin{cases} B^2 = A^2 \left[\cos^2(\alpha_0' + \varphi) - \frac{1}{\lambda_1'^2} \sin^2(\alpha_0' + \varphi) \right], \\ \psi = \beta_1 - \operatorname{arcth} \frac{1}{\lambda_1'} \operatorname{tg}(\alpha_0' + \varphi), \\ r_0 = B \operatorname{ch}[\quad]; \end{cases}$$

K' > 1 :

$$(247') \quad \begin{cases} B^2 = A^2 \left[\frac{1}{\lambda_1'^2} \sin^2(\alpha_0' + \varphi) - \cos^2(\alpha_0' + \varphi) \right], \\ \psi = \beta_1 - \operatorname{arcth} \lambda_1' \operatorname{cotg}(\alpha_0' + \varphi), \\ r_0 = B \operatorname{sh}[\quad]. \end{cases}$$

c. r_0' imaginaire. — Tant que la réflexion de l'électron a lieu dans la région centrale, les relations établies en b restent valables, à condition d'y remplacer α par $\alpha' = i\alpha$.

Lorsque la réflexion de l'électron a lieu dans la région d'incidence même, on a $B = r_0$.

Rappelons la signification des symboles. On a

$$(248) \quad \begin{cases} x = \frac{1}{z_0} \sqrt{\frac{1}{k} \frac{1-x}{x}}, & \beta = \frac{1}{z_0} \sqrt{\frac{1}{1-k} (1-x)}, \\ x' = \frac{1}{z_0} \sqrt{\frac{1}{k} \frac{x-1}{x}}; \end{cases}$$

$$(249) \quad \begin{cases} z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arsh} k z_0 \sqrt{\frac{2\alpha^2}{2 - A^2 \alpha^2}}, \\ z_0' = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arch} k z_0 \sqrt{\frac{2\alpha^2}{A^2 \alpha^2 - 2}}, \\ \text{ou } \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arch} k z_0 \sqrt{\frac{2\alpha^2}{A^2 \alpha'^2 - 2}}; \\ \beta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin(1-k) z_0 \sqrt{\frac{2\beta_1^2}{2 + r_0^2 \beta_1^2}}, \\ \beta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin(1-k) z_0 \sqrt{\frac{2\beta_2^2}{2 + B^2 \beta_2^2}}; \end{cases}$$

$$(250) \quad \lambda_1^2 = \frac{2kx + (1-x) \left[2k^2 - \left(\frac{r_0}{z_0} \right)^2 \operatorname{ch}^2 \beta_1 \right]}{\left\{ 2(1-k) + (1-x) \right\} \times \left[\left(\frac{r_0}{z_0} \right)^2 \operatorname{ch}^2 \beta_1 - 2(1-k)^2 \right]},$$

$$(251) \quad \lambda_1'^2 = \frac{2kx + (1-x) \left\{ 2k^2 - \left(\frac{A}{z_0} \right)^2 [1 \mp \sin^2(\alpha_0 - \varphi)] \right\}}{\left\{ 2(1-k) + (1-x) \right\} \times \left[\pm \left(\frac{A}{z_0} \right)^2 \cos^2(\alpha_0 - \varphi) - 2(1-k)^2 \right]},$$

$$(251') \quad \lambda_1'^2 = \frac{2kx + (1-x) \left\{ 2k^2 - \left(\frac{A}{z_0} \right)^2 [1 \mp \sin^2(\alpha_0 - \varphi)] \right\}}{\left\{ 2(1-k) + (1-x) \right\} \times \left[\pm \left(\frac{A}{z_0} \right)^2 \cos^2(\alpha_0 + \varphi) - 2(1-k)^2 \right]},$$

On voit que les coefficients caractéristiques de la trajectoire A, B, φ et ψ , bien que semblables sous

leur aspect formel à ceux obtenus dans le cas gaussien, sont sensiblement plus compliquées au point de vue de leur calcul effectif. Les quantités intermédiaires λ_1 et λ_2 par exemple qui étaient constantes dans l'approximation de Gauss, dépendent ici de x et de l'incidence $\frac{r_0}{z_0}$.

Pratiquement, on calculera, à partir des paramètres x et $\frac{r_0}{z_0}$ et dans l'ordre, les quantités β , α (resp. α') β_1 , λ_1 , A , α_0 (resp. α'_0), φ , λ_2 , (resp. λ'_2), B_2 , β_2 et ψ et l'on sera ainsi en possession de tous les éléments nécessaires au calcul de la trajectoire.

images, de déterminer les zones de fonctionnement, etc. de la lentille électrostatique indépendante fonctionnant en régime transgaussien.

En particulier, la valeur du rayon limite séparant la zone « lentille » de la zone « miroir » est donnée par l'équation $A^2\alpha^2 = 2$ qui s'écrit, tous calculs faits

$$(252) \quad 1 + \frac{2(x+k-hx)\operatorname{sh}^2\beta_1}{2(1-k)+2(1-x)\left[\left(\frac{r_0 l}{z_0}\right)^2 \operatorname{ch}^2\beta_1 - 2(1-k)^2\right]} = \frac{2kx}{(1-x)\left(\frac{r_0 l}{z_0}\right)^2}.$$

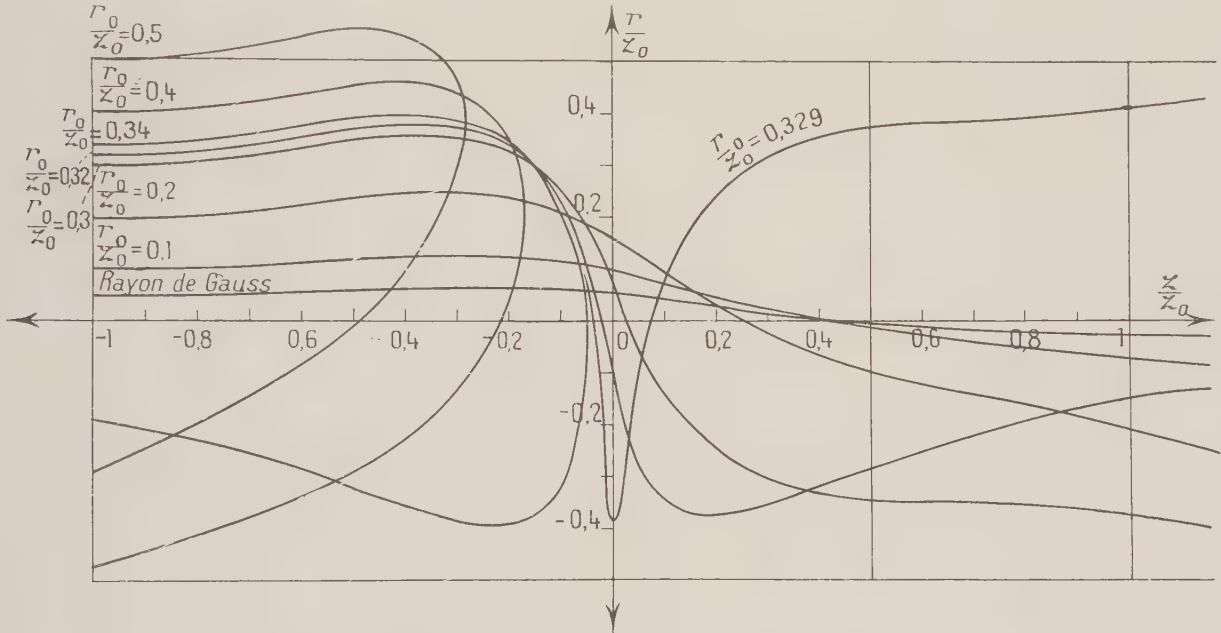


Fig. 51. — Trajectoires transgaussiennes dans la lentille $\frac{\Phi(0)}{\Phi(z_0)} = 0,10$.

À titre d'exemple, la figure 51 montre les trajectoires transgaussiennes calculées, d'après ce procédé, pour la lentille $x = 0,1$ avec $k = \frac{2}{3}$ (position usuelle du point d'inflexion de la courbe du potentiel sur l'axe).

Discussion des trajectoires transgaussiennes.

Les relations que nous avons établies définissent entièrement les trajectoires transgaussiennes en fonction du paramètre caractéristique de la lentille

$$x = \frac{\Phi(0)}{\Phi(z_0)}$$

et celui qui spécifie l'incidence $\frac{r_0}{z_0}$. Elles permettent de calculer les éléments optiques, d'étudier les

Nous avons calculé les valeurs de $\frac{r_0 l}{z_0}$ en fonction de x pour $k = \frac{2}{3}$ (cas pratiquement général).

Les racines de l'équation

$$(253) \quad \left\{ \begin{aligned} & 1 + \frac{3(x+2)\operatorname{sh}^2\beta_1}{3+(1-x)\left[9\left(\frac{r_0 l}{z_0}\right)^2 \operatorname{ch}^2\beta_1 - 2\right]} \\ & = \frac{4x}{3(1-x)\left(\frac{r_0 l}{z_0}\right)^2}, \\ & \beta_1 = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \arcsin \frac{1}{3} \sqrt{\frac{6(1-x)}{2+3(1-x)\left(\frac{r_0 l}{z_0}\right)^2}}, \end{aligned} \right.$$

c'est-à-dire les valeurs de $\frac{r_0 l}{z_0}$ en fonction de x ont été portées dans la figure 52.

Pour x tendant vers 1, $\frac{r_{0l}}{z_0}$ devient infiniment grand.

En d'autres termes, les lentilles dévoltées ou les lentilles dont l'électrode centrale possède un diamètre assez fort, fonctionnent sensiblement en régime gaussien. Par contre, les lentilles dont le paramètre x est faible (par exemple lentille de projection usuelle) fonctionneront en régime transgaussien.

Pour x de l'ordre de 0,1 ou inférieur, la relation (253) peut être remplacée approximativement par $r_{0l} = \frac{10}{3} x z_0$.

Dans la même hypothèse, la zone « gaussienne » de la lentille est sensiblement donnée par $r_{0g} \leq \frac{1}{2} x z_0$ et la zone « du troisième ordre » par $r_{03} \leq x z_0$.

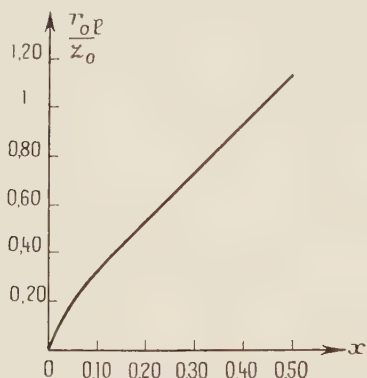


Fig. 52.

Si l'on considère par exemple une lentille de projection usuelle pour laquelle $x = 0,1$ et $z_0 \cong 4,5$ mm, il sera avantageux, pour éviter les phénomènes résultant d'oscillations multiples, de placer devant la lentille un diaphragme de diamètre $2xz_0 \cong 0,9$ mm, en bon accord avec la valeur trouvée expérimentalement.

Étude des éléments optiques transgaussiens.

On peut encore définir ici des distances focales, foyers, etc. Toutefois, les éléments optiques dépendront non seulement de x , mais aussi de l'incidence $\frac{r_0}{z_0}$ et leurs expressions seront, par conséquent, plus compliquées. En outre, et contrairement au régime gaussien, les distances focales objet et image et les abscisses correspondantes des foyers ne seront plus égales en valeur absolue. Les plans principaux deviendront ici « des surfaces principales ».

Dans le calcul des éléments optiques transgaussiens nous nous limiterons aux éléments « images » ;

nous distinguerons encore plusieurs cas suivant les valeurs de r_0 et r_{0l} .

a. $r_0 < r_{0l}$. — 1° Distance focale image. — La formule

$$f = \frac{-r_0}{\left(\frac{dr}{dz}\right)_{z=z_0}}$$

fournit, tous calculs faits,

$$(254) \quad \frac{1}{f} = \frac{3A}{\lambda_2 r_0} \sqrt{\frac{ch^2 \beta_2 + \lambda_2^2 sh^2 \beta_2}{2 + B^2 \beta_2^2}} \sin(2\alpha_0 - \chi_1),$$

avec

$$(255) \quad \begin{cases} \chi_1 = \arctg \frac{\lambda_1 th \beta_1 + \lambda_2 th \beta_2}{1 - \lambda_1 \lambda_2 th \beta_1 th \beta_2}, \\ B^2 = A^2 \left[\cos^2(\alpha_0 - \varphi) - \frac{1}{\lambda_2^2} \sin^2(\alpha_0 - \varphi) \right]. \end{cases}$$

2° Position du foyer image. — La formule de définition (intersection avec l'axe de la tangente au rayon émergent)

$$z_F = z_0 - \left(\frac{r}{\frac{dr}{dz}} \right)_{z=z_0}$$

fournit, après quelques calculs,

$$(256) \quad \frac{z_F}{z_0} = 1 - \frac{\sqrt{2 + B^2 \beta_2^2}}{\beta_2 z_0} \sqrt{\frac{\lambda_2^2 + th^2 \beta_2}{1 + \lambda_2^2 th^2 \beta_2}} \frac{\sin(2\alpha_0 - \chi_2)}{\sin(2\alpha_2 - \chi_1)},$$

χ_1 et B étant donnés par (255) et

$$(257) \quad \chi_2 = \arctg \frac{\lambda_2 + \lambda_1 th \beta_1 th \beta_2}{th \beta_2 - \lambda_1 \lambda_2 th \beta_1}.$$

3° Surface principale image. — Elle est définie comme le lieu de l'intersection de la tangente au rayon émergent avec le prolongement du rayon incident parallèle à l'axe. C'est une surface de révolution dont la méridienne a pour coordonnées

$$(258) \quad P \begin{cases} \frac{z_F}{z_0} = \frac{z_F}{z_0} - \frac{f}{z_0}, \\ \frac{r_0}{z_0}. \end{cases}$$

Les relations (254) et (256) permettent d'écrire immédiatement

$$(259) \quad \frac{z_F}{z_0} = 1 + \sqrt{2 + B^2 \beta_2^2} \cdot \frac{\lambda_2 \sqrt{\lambda_2^2 ch^2 \beta_2 + sh^2 \beta_2} \sin(2\alpha_0 - \chi_2) - \lambda_2 r_0}{\beta_2 z_0 A \sqrt{ch^2 \beta_2 + \lambda_2^2 sh^2 \beta_2} \sin(2\alpha_0 - \chi_1)}.$$

b. $r_0 > r_{0l}$. — Pour obtenir les formules des éléments optiques dans la zone fonctionnant en miroir, il suffit de remplacer dans les formules précédentes α_0

par α'_0 et de respecter le sens de la marche des rayons. On trouve ainsi :

1° Distance focale image du côté miroir :

$$(254') \quad \frac{1}{f} = -\frac{\beta \Lambda}{\lambda_2' r_0} \sqrt{\frac{\text{ch}^2 \beta_2 + \lambda_2'^2 \text{sh}^2 \beta_2}{2 + B^2 \beta_2^2}} \sin(2\alpha'_0 - \chi_1'),$$

avec

$$(255') \quad \begin{cases} \chi_1' = \arctg \frac{\lambda_1 \text{th} \beta_1 + \lambda_2' \text{th} \beta_2}{1 - \lambda_1 \lambda_2' \text{th} \beta_1 \text{th} \beta_2}, \\ B^2 = \Lambda^2 \left| \cos^2(\alpha'_0 + \varphi) - \frac{1}{\lambda_2'^2} \sin^2(\alpha'_0 + \varphi) \right|. \end{cases}$$

2° Abscisse du foyer image du côté miroir :

$$(256') \quad \frac{z_F}{z_0} = -1 - \frac{\sqrt{2 + B^2 \beta_2^2}}{\beta z_0} \sqrt{\frac{\lambda_2'^2 + \text{th}^2 \beta_2}{1 + \lambda_2'^2 \text{th}^2 \beta_2}} \frac{\sin(2\alpha'_0 - \chi_2')}{\sin(2\alpha'_0 - \chi_1')},$$

avec

$$(257') \quad \chi_2' = \arctg \frac{\lambda_2' + \lambda_1 \text{th} \beta_1 \text{th} \beta_2}{\text{th} \beta_2 - \lambda_1 \lambda_2' \text{th} \beta_1}.$$

3° Surface principale image du côté miroir :

$$(258') \quad P \begin{cases} \frac{z_P}{z_0} = -1 - \sqrt{2 + B^2 \beta_2^2} \\ \times \frac{\left\{ \Lambda \sqrt{\lambda_2'^2 \text{ch}^2 \beta_2 + \text{sh}^2 \beta_2} \right\}}{\left\{ \beta z_0 \Lambda \sqrt{\text{ch}^2 \beta_2 + \lambda_2'^2 \text{sh}^2 \beta_2} \right\}} \\ \times \frac{\left\{ \sin(2\alpha'_0 - \chi_2') - \lambda_2' r_0 \right\}}{\left\{ \sin(2\alpha'_0 - \chi_1') \right\}} \end{cases} \begin{matrix} r_0 \\ z_0 \end{matrix}$$

c. r_0 imaginaire. — Tant que la réflexion de l'électron a lieu dans la région centrale, les relations établies en *b* restent valables à condition d'y remplacer α par $\alpha' = i\alpha$.

Lorsque la réflexion de l'électron a lieu dans la région d'incidence même, le calcul fournit :

$$(260) \quad 1^\circ \quad f = \frac{\sqrt{2 + r_0^2 \beta_2^2}}{\beta \text{sh} \frac{\pi}{\sqrt{2}}};$$

$$(261) \quad 2^\circ \quad \frac{z_F}{z_0} = -1 + \frac{\sqrt{2 + r_0^2 \beta_2^2}}{\beta z_0} \coth \frac{\pi}{\sqrt{2}};$$

$$(262) \quad 3^\circ \quad P \begin{cases} \frac{z_P}{z_0} = -1 + \frac{\sqrt{2 + r_0^2 \beta_2^2}}{\beta z_0} \frac{\text{ch} \frac{\pi}{\sqrt{2}} - 1}{\coth \frac{\pi}{\sqrt{2}}}, \\ r_0. \end{cases} z_0$$

Remarquons que, d'une manière analogue à la surface principale, on pourrait définir une « surface focale » dont la méridienne aura pour coordonnées

$$P \begin{cases} \frac{z_F}{z_0}, \\ r_0. \end{cases} z_0$$

(Il ne saurait y avoir de confusion entre cette surface et la caustique.)

Les éléments optiques transgaussiens de la lentille électrostatique symétrique (et du miroir qui s'y rattache) étant des fonctions de deux variables indépendantes, x et $\frac{r_0}{z_0}$, on pourra les représenter par des surfaces dans un espace à trois dimensions.

Images en régime transgaussien.

1° POINT D'IMPACT DE L'ÉLECTRON SUR L'ÉCRAN RÉCEPTEUR. — Soient (*fig. 53*) Z la distance au point $z = 0$ d'un plan perpendiculaire à l'axe de la lentille (écran fluorescent ou plaque photogra-

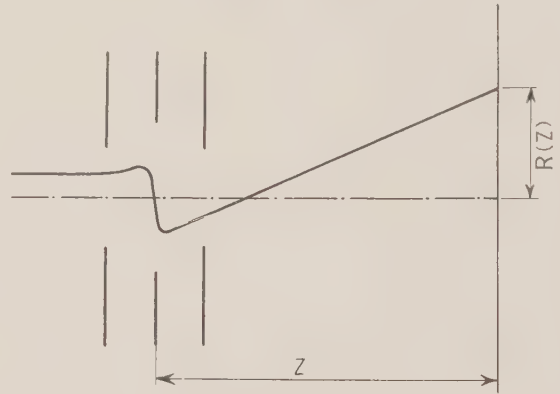


Fig. 53.

phique) et $R = r(Z)$ l'ordonnée du point d'impact du rayon électronique dans ce plan.

On a

$$(263) \quad R = r(z_0) + r'(z_0)(Z - z_0).$$

Les relations précédemment établies fournissent

$$(264) \quad r(z_0) = \frac{\Lambda}{\lambda_2} \sqrt{\lambda_2^2 \text{ch}^2 \beta_2 + \text{sh}^2 \beta_2} \sin(2z_0 - \chi_2)$$

et

$$(265) \quad r'(z_0) = -\frac{\Lambda \beta}{\lambda_2 \sqrt{2 + B^2 \beta_2^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\text{ch}^2 \beta_2 + \lambda_2^2 \text{sh}^2 \beta_2}} \sin(2z_0 - \chi_1).$$

On peut par suite écrire

$$(266) \quad \boxed{\begin{aligned} & R\left(Z, \frac{r_0}{z_0}, x\right) \\ &= \frac{\Lambda}{\lambda_2} \sqrt{\lambda_2^2 \text{ch}^2 \beta_2 + \text{sh}^2 \beta_2} \sin(2z_0 - \chi_2) \\ &+ \frac{r_0}{z_0} (Z - z_0). \end{aligned}}$$

2° IMAGE D'UNE DROITE ÉCLAIRÉE PAR UN FAISCEAU PARALLÈLE. — Si la droite coupe l'axe de la

lentille, l'image sera une droite coplanaire. Il n'en est plus de même lorsque la droite-objet n'est pas située dans un plan-méridien de la lentille. Nous

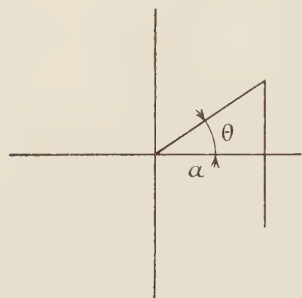


Fig. 54.

prendrons alors dans le plan d'entrée de la lentille pour origine des azimuts la perpendiculaire à la droite donnée (fig. 54). Si a est sa distance à l'axe,

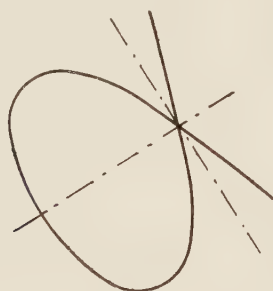


Fig. 55.

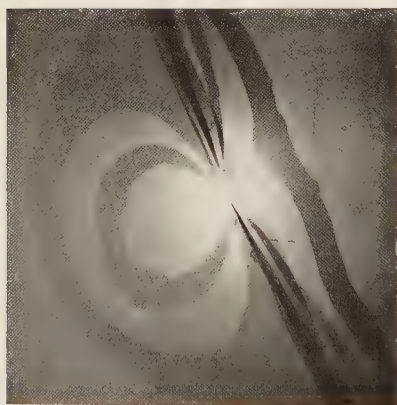


Fig. 56.

l'équation de la droite s'écrira en coordonnées polaires

$$\rho = \frac{a}{\cos \theta}.$$

On aura l'équation de l'image de la droite en rem-

plaçant dans la relation (266) $\frac{r_0}{z_0}$ par $\frac{a}{z_0 \cos \theta}$ et en faisant varier θ entre zéro et $\arccos \frac{a}{r_{0l}}$.

$$R = R\left(Z, \frac{a}{z_0 \cos \theta}, x\right), \quad 0 < \theta < \arccos \frac{a}{r_{0l}}.$$

On obtient ainsi une courbe en lacet (fig. 55), en bon accord avec la photographie obtenue expérimentalement (fig. 56).

3° IMAGE D'UN CERCLE ÉCLAIRÉ PAR UN FAISCEAU PARALLÈLE. — Lorsque le cercle est centré sur l'axe de la lentille, on obtiendra pour image un cercle concentrique. Dans le cas contraire, l'image sera très compliquée. En particulier, une ellipse peut avoir pour image un cercle et un arc de cercle peut avoir pour image un segment de droite.

C'est seulement lorsque la lentille fonctionne au voisinage du régime gaussien que les images obtenues peuvent être expliquées à l'aide du phénomène classique de distorsion. L'introduction d'un coefficient de distorsion constant est impuissante à décrire correctement la courbe en lacet (transformée d'une droite) qui résulte des oscillations multiples des rayons. C'est là un phénomène qui n'a pas son analogie en Optique ordinaire.

Nous avons supposé tacitement $a < r_{0l}$. Les raisonnements peuvent être transposés sans difficulté au cas $a > r_{0l}$. Il suffit de placer l'écran du côté de l'incidence (fonctionnement en miroir).

Expression générale des aberrations géométriques dans le plan image.

Nous affecterons, dans ce paragraphe, de l'indice l les grandeurs relatives au régime transgaussien et de l'indice g les grandeurs gaussiennes correspondantes. Nous supposerons toujours que le faisceau incident est parallèle à l'axe et nous distinguerons trois cas suivant les intersections du rayon de Gauss avec l'axe.

1° LE RAYON GAUSSIEN COUPE L'AXE EN DEHORS DE LA LENTILLE. — Les équations des trajectoires seront alors dans les deux régimes respectivement :

$$(267) \quad r_l(z) = r_l(z_0) + r'_l(z_0)(z - z_0),$$

$$(268) \quad r_g(z) = r_g(z_0) + r'_g(z_0)(z - z_0).$$

En appliquant ces deux relations au plan de Gauss, on trouve

$$(269) \quad \Delta r = r_l(z_0) - r'_l(z_0) \frac{r_g(z_0)}{r'_g(z_0)}.$$

2° LE RAYON GAUSSIEN COUPE L'AXE DANS LA RÉGION D'ÉMERGENCE. — On a alors

$$(270) \quad r_l = B_l \operatorname{sh} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arcsin} (z - z_0) \sqrt{\frac{2\beta^2}{2 + B_l^2 \beta^2}} - \psi_l \right],$$

$$(271) \quad r_g = B_g \operatorname{sh} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arcsin} \beta (z - z_0) - \psi_g \right]$$

et dans le plan gaussien, défini ici par l'intersection de la trajectoire de Gauss avec l'axe

$$(272) \quad \Delta r = B_l \operatorname{sh} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arcsin} \frac{\sqrt{2} \sin \psi_g \sqrt{2}}{\sqrt{2 + B_l^2 \beta^2}} - \psi_l \right],$$

3° LE RAYON GAUSSIEN COUPE L'AXE DANS LA RÉGION CENTRALE. — On a ici

$$(273) \quad r_l = A_l \cos \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arcsinh} z \sqrt{\frac{2\alpha^2}{2 - A_l^2 \alpha^2}} - \varphi_l \right],$$

$$(274) \quad r_g = A_g \cos \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arcsinh} z - \varphi_g \right];$$

d'où

$$(275) \quad \Delta r = A_l \cos \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arcsinh} \sqrt{\frac{2}{2 - A^2 z^2}} \cdot \operatorname{sh} \left[\sqrt{2} \varphi_g + \sqrt{2} \pi \left(n + \frac{1}{2} \right) \right] - \varphi_l \right].$$

Les formules établies montrent que l'aberration Δr est fonction de x et de $\frac{r_0}{z_0}$. Est-il possible de rendre nulle cette fonction ? Non, s'il s'agit d'une annulation globale, valable pour toutes les valeurs $\frac{r_0}{z_0}$, x étant donné ou pour toutes les valeurs de x , $\frac{r_0}{z_0}$ étant donné. Oui, si l'on considère des couples discrets $x, \frac{r_0}{z_0}$. Il est clair, en effet, qu'après avoir oscillé un certain nombre de fois autour de l'axe, un rayon transgaussien est susceptible d'intersecter le plan de Gauss au même point que le rayon gaussien.

Ces couples discrets seront alors déterminés dans les trois cas par :

$$(276) \quad 1^\circ \quad \frac{r_l(z_0)}{r_g(z_0)} = \frac{r'_l(z_0)}{r'_g(z_0)};$$

$$(277) \quad 2^\circ \quad \frac{\sin \psi_l \sqrt{2}}{\sin \psi_g \sqrt{2}} = \sqrt{\frac{2}{2 + B_l^2 \beta^2}};$$

$$(278) \quad 3^\circ \quad \frac{\operatorname{sh} \left[\sqrt{2} \pi \left(n + \frac{1}{2} \right) + \varphi_l \sqrt{2} \right]}{\operatorname{sh} \left[\sqrt{2} \pi \left(n + \frac{1}{2} \right) + \varphi_g \sqrt{2} \right]} = \sqrt{\frac{2}{2 - A^2 z^2}}.$$

Mathématiquement, il existe donc des rayons isolés pour lesquels l'aberration par rapport au rayon de

Gauss est nulle. Cependant, il ne sera pas possible de les mettre en évidence physiquement, précisément parce qu'ils sont isolés et, de ce fait, ne laisseront aucune trace sur l'écran.

(C'est également pour des raisons de ce genre qu'il est de plus en plus difficile d'obtenir des images à l'aide de rayons dont les oscillations autour de l'axe vont en croissant. De tels rayons proviennent, en effet, d'une zone Δr_0 qui s'amenuise au fur et à mesure qu'on approche de r_{0l} , c'est-à-dire au fur et à mesure que le nombre des oscillations augmente.)

Par contre, les expressions des aberrations montrent que pour x donné, il peut y avoir non seulement des valeurs discrètes, mais des zones Δr_0 , produisant des aberrations de signe contraire à celles qu'on rencontre dans la lentille usuelle.

Nous avons supposé tacitement $r_0 < r_{0l}$. Pour $r_0 > r_{0l}$, le rayon transgaussien ne coupe point le plan de Gauss et la notion d'aberration perd sa signification. C'est un exemple qui prouve à quel point une circonspection est de mise lorsqu'on veut généraliser certaines notions, empruntées à l'optique de la lumière.

Pour r_{0l} imaginaire, le système fonctionne en miroir déjà à l'approximation de Gauss. On peut alors établir des expressions analogues à (275).

Étude de la caustique.

Considérons une lentille fonctionnant en régime transgaussien et faisons varier le paramètre r_0 entre zéro et r_{0l} . Les rayons successifs ainsi obtenus vont s'appuyer sur une surface appelée caustique dont on pourra déterminer les équations en cherchant l'enveloppe des rayons pour r_0 variable.

Nous envisagerons ici la caustique principale, c'est-à-dire l'enveloppe dans l'espace-image d'un faisceau de rayons initialement parallèles à l'axe. Ce sera une surface de révolution dont nous allons étudier la méridienne.

Il sera relativement aisé d'écrire les équations des portions de la caustique situées à l'extérieur de la lentille (dans le cas de l'objectif la caustique sera située entièrement à l'extérieur de la lentille). En effet, dans cette région, les rayons électroniques sont représentés par les droites

$$(263) \quad \begin{cases} R = r(z_0) + r'(z_0)(Z - z_0), \\ \left[r'(z_0) = \left(\frac{dr}{dz} \right)_{z=z_0} \right], \end{cases}$$

où $r(z_0)$ et $r'(z_0)$ sont des fonctions de x et de $\frac{r_0}{z_0}$. On obtiendra l'équation de la caustique en associant

à l'équation (263), celle qu'on obtient par dérivation, c'est-à-dire

$$(279) \quad \frac{dr(z_0)}{dr_0} + \frac{dr'(z_0)}{dr_0} (Z - z_0) = 0.$$

En résolvant les équations (263) et (279), on aura une représentation paramétrique des portions de caustique situées à l'extérieur de la lentille :

$$(280) \quad Z = Z\left(\frac{r_0}{z_0}, x\right)_{x=\text{const.}} = z_0 - \frac{\frac{dr(z_0)}{dr_0}}{\frac{dr'(z_0)}{dr_0}},$$

$$(281) \quad R = R\left(\frac{r_0}{z_0}, x\right)_{x=\text{const.}} = r(z_0) - r'(z_0) \frac{\frac{dr(z_0)}{dr_0}}{\frac{dr'(z_0)}{dr_0}}.$$

Pour déterminer les quantités $\frac{dr(z_0)}{dr_0}$ et $\frac{dr'(z_0)}{dr_0}$, on calculera dans l'ordre

$$(282) \quad \frac{d\beta_1}{dr_0} = - \frac{r_0 \sin^2 \sqrt{2} \beta_1}{\sqrt{2} (1-k)^2 z_0^2 \sin 2 \sqrt{2} \beta_1},$$

$$(283) \quad \lambda_1 \frac{d\lambda_1}{dr_0} = - \frac{2(x+k-kx)}{z_0^2} \times \frac{(1-x) r_0 \operatorname{ch} \beta_1 \left[\operatorname{ch} \beta_1 + r_0 \operatorname{sh} \beta_1 \frac{d\beta_1}{dr_0} \right]}{\left\{ 2(1-k) + (1-x) \right.} \\ \left. \left[1 - \left(\frac{r_0}{z_0} \right)^2 \operatorname{ch}^2 \beta_1 - 2(1-k)^2 \right] \right\}^2},$$

$$(284) \quad \frac{d\Lambda}{dr_0} = \frac{\Lambda}{r_0} + \frac{r_0^2}{2\Lambda} \left[(1+\lambda_1)^2 \times \frac{d\beta_1}{dr_0} \operatorname{sh} 2\beta_1 \right. \\ \left. + 2\lambda_1 \frac{d\lambda_1}{dr_0} \operatorname{sh} \beta_1 \right],$$

$$(285) \quad \frac{dz_0}{dr_0} = \frac{\Lambda \operatorname{sh}^2 \sqrt{2} \alpha_0}{\sqrt{2} k^2 z_0^2 \operatorname{sh} 2 \sqrt{2} \alpha_0} \frac{d\Lambda}{dr_0},$$

$$(286) \quad \frac{d\varphi}{dr_0} = \frac{r_0^2}{\Lambda^2} \left(\frac{1}{2} \operatorname{sh} 2 \beta_1 \frac{d\lambda_1}{dr_0} + \lambda_1 \frac{d\beta_1}{dr_0} \right) - \frac{dz_0}{dr_0},$$

$$(287) \quad \lambda_2 \frac{d\lambda_2}{dr_0} = - \frac{2(x+k-kx)}{z_0^2} \times \frac{\left\{ \begin{array}{l} (1-x) \Lambda \cos(\alpha_0 - \varphi) \\ \left[\frac{d\Lambda}{dr_0} \cos(\alpha_0 - \varphi) \right. \\ \left. \Lambda \sin(\alpha_0 - \varphi) \right. \\ \left. \left(\frac{dz_0}{dr_0} - \frac{d\varphi}{dr_0} \right) \right] \end{array} \right\}}{\left\{ 2(1-k) + (1-x) \right.} \\ \left. \times \left[\left(\frac{\Lambda}{z_0} \right)^2 \cos^2(\alpha_0 - \varphi) \right. \right. \\ \left. \left. - 2(1-k)^2 \right] \right\}^2},$$

$$(288) \quad \frac{dB}{dr_0} = \frac{B}{\Lambda} \frac{d\Lambda}{dr_0} \\ + \frac{\Lambda^2}{2B} \left[\left(\frac{d\varphi}{dr_0} - \frac{dz_0}{dr_0} \right) \left(1 + \frac{1}{\lambda_2^2} \right) \sin 2(\alpha_0 - \varphi) \right. \\ \left. + \frac{2 \sin^2(\alpha_0 - \varphi)}{\lambda_2^3} \frac{d\lambda_2}{dr_0} \right],$$

$$(289) \quad \frac{d\beta_2}{dr_0} = - \frac{B \sin^2 \sqrt{2} \beta_2}{\sqrt{2} (1-k)^2 z_0^2 \sin 2 \sqrt{2} \beta_2} \frac{dB}{dr_0},$$

et

$$(290) \quad \frac{d\psi}{dr_0} = \frac{B^2}{\lambda_2 \Lambda^2} \left[\frac{dz_0}{dr_0} - \frac{d\varphi}{dr_0} - \frac{1}{2\lambda_2} \sin 2(\alpha_0 - \varphi) \frac{d\lambda_2}{dr_0} \right] \\ - \frac{d\beta_2}{dr_0}.$$

On aura ainsi tous les éléments nécessaires au calcul des expressions

$$\frac{dr(z_0)}{dr_0} = \frac{d}{dr_0} (B \operatorname{ch} \psi)$$

et

$$\frac{dr'(z)}{dr} = - \beta \frac{d}{dr_0} \frac{B \operatorname{sh} \psi}{\sqrt{2 + B^2 \beta^2}}$$

et à la construction pratique de la caustique. Dans ces formules, nous avons supposé $|K| < 1$. On obtient des formules analogues dans le cas $|K| > 1$.

Nos raisonnements sont valables tant que $Z > z_0$,

c'est-à-dire $\frac{dr(z_0)}{dr'(z_0)} < 0$. Pour $Z < -z_0$ (portions de

caustique extérieures à la lentille dans le fonctionnement en miroir), les équations paramétriques de la caustique peuvent encore être établies d'une manière explicite.

La détermination des portions de caustique situées à l'intérieur de la lentille est beaucoup plus pénible. En effet, dans cette région, les équations

$$R = R\left(\frac{r_0}{z_0}, x, Z\right), \quad \frac{dR}{dr_0} = 0,$$

ne peuvent plus être résolues d'une manière explicite. On peut alors procéder de la façon suivante :

1° RÉGION D'ÉMERGENCE. — La caustique est définie par (nous supposons $|K| < 1$, on aurait des formules analogues pour $|K| > 1$)

$$(291) \quad R = B \operatorname{ch} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin(Z - z_0) \sqrt{\frac{2\beta^2}{2 + B^2\beta^2} - \psi} \right],$$

$$(292) \quad \frac{dB}{dr_0} \operatorname{ch} [\quad] - B \operatorname{sh} [\quad] \\ \times \left[\frac{(Z - z_0) \beta^3 B \frac{d\beta}{dr_0}}{(2 + B^2\beta^2) \sqrt{2 + B^2\beta^2 - 2\beta^2(Z - z_0)^2}} \right. \\ \left. + \frac{d\psi}{dr_0} \right] = 0.$$

Pour chaque valeur de $\frac{r_0}{z_0}$, on pourra résoudre, par approximations successives, l'équation en Z (292) et porter ensuite la valeur obtenue dans (291). On aura ainsi les deux coordonnées de la méridienne de la caustique

$$Z = Z\left(\frac{r_0}{z_0}\right) \quad \text{et} \quad R = R\left(\frac{r_0}{z_0}\right).$$

La méthode, qui est longue et pénible, peut être grandement facilitée par le tracé effectif des trajectoires, qui permet de déterminer graphiquement la forme de la caustique (fig. 51).

2° RÉGION CENTRALE. — Les mêmes raisonnements sont applicables à la région centrale, où la caustique est définie par

$$(293) \quad R = A \cos \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin Z \sqrt{\frac{2x^2}{2 - A^2 x^2}} - \varphi \right],$$

$$(294) \quad \frac{dA}{dr_0} \cos \left[\dots \right] - A \sin \left[\dots \right]$$

$$\left[\frac{Z x^3 A \frac{dA}{dr_0}}{(2 - A^2 x^2) \sqrt{2 - A^2 x^2 + 2 x^2 Z^2}} - \frac{d\varphi}{dr_0} \right] = 0.$$

Dans ces relations nous avons supposé $r_0 < r_{0'}$. On écrirait sans difficulté les équations pour $r_0 > r_{0'}$.

3° RÉGION D'INCIDENCE. — Des portions de caustique peuvent exister dans cette région, soit pour $r_0 > r_{0'}$, soit pour $x < 0$. Des équations de formes analogues aux précédentes et qu'on écrirait aisément, fournissent encore la solution du problème.

Théorie des rayons obliques.

Jusqu'à présent, nous avons considéré seulement les rayons électroniques initialement parallèles à l'axe.

La théorie peut évidemment être élargie au cas des rayons obliques.

Soient r ($-z_0$) la distance de la trajectoire à l'axe dans le plan d'entrée de la lentille et r' ($-z_0$) = $\operatorname{tg} \gamma$ la pente du rayon dans le même plan.

Les équations de la trajectoire s'écrivent, dans la zone fonctionnant en lentille :

$$(295) \quad \begin{cases} r_1 = a \operatorname{ch} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin (z + z_0) \sqrt{\frac{2\beta^2}{2 + a^2 \beta^2}} - \delta \right], \\ r_2 = A \cos \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin z \sqrt{\frac{2x^2}{2 - A^2 x^2}} - \varphi \right], \\ r_3 = B \operatorname{ch} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin (z - z_0) \sqrt{\frac{2\beta^2}{2 + B^2 \beta^2}} - \psi \right]. \end{cases}$$

Les coefficients a , δ , A , φ , B et ψ peuvent être déterminés en fonction des conditions initiales r_0 et $r'_{0'}$.

On a, suivant les valeurs de r_0 , $r'_{0'}$ et β :

$$r_0 > \left| \frac{\sqrt{2}}{\beta} \operatorname{tg} \gamma \right| :$$

$$(296) \quad \begin{cases} a^2 = r_0^2 \cos^2 \gamma - \frac{2}{\beta^2} \sin^2 \gamma, \\ \delta = -\arcsin \frac{\sqrt{2 + r_0^2 \beta^2}}{\beta r_0} \sin \gamma, \\ r_1 = a \operatorname{ch} \left[\dots \right], \\ A^2 = a^2 [\operatorname{ch}^2 (\beta_1 - \delta) + \lambda_1^2 \operatorname{sh}^2 (\beta_1 - \delta)], \\ \varphi = \arcsin \operatorname{tg} \lambda_1 \operatorname{th} (\beta_1 - \delta) - \alpha_0, \\ \lambda_1^2 = \frac{2kx + (1-x) \left[2k^2 - \left(\frac{a}{z_0} \right)^2 \operatorname{ch}^2 (\beta_1 - \delta) \right]}{\left\{ 2(1-k) + (1-x) \right.} \\ \left. \times \left[\left(\frac{a}{z_0} \right)^2 \operatorname{ch}^2 (\beta_1 - \delta) - 2(1-k)^2 \right] \right\}}; \end{cases}$$

$$r_0 < \left| \frac{\sqrt{2}}{\beta} \operatorname{tg} \gamma \right| :$$

$$(296') \quad \begin{cases} a^2 = \frac{2}{\beta^2} \sin^2 \gamma - r_0^2 \cos^2 \gamma, \\ \delta = -\arcsin \frac{\beta r_0}{\sqrt{2 + r_0^2 \beta^2} \sin \gamma}, \\ r_1 = a \operatorname{sh} \left[\dots \right], \\ A^2 = a^2 [\operatorname{sh}^2 (\beta_1 - \delta) + \lambda_1^2 \operatorname{ch}^2 (\beta_1 - \delta)], \\ \varphi = \arcsin \operatorname{tg} \lambda_1 \operatorname{coth} (\beta_1 - \delta) - \alpha_0, \\ \lambda_1^2 = \frac{2kx + (1-x) \left[2k^2 - \left(\frac{a}{z_0} \right)^2 \operatorname{sh}^2 (\beta_1 - \delta) \right]}{\left\{ 2(1-k) + (1-x) \right.} \\ \left. \times \left[\left(\frac{a}{z_0} \right)^2 \operatorname{sh}^2 (\beta_1 - \delta) - 2(1-k)^2 \right] \right\}}. \end{cases}$$

Les coefficients B et ψ sont donnés par les formules (247).

La séparation entre la « zone lentille » et la « zone miroir » est fournie par la relation $A^2 x^2 = 2$.

En résolvant cette équation, on trouve qu'à chaque valeur de r_0 , il correspond en principe deux valeurs de $r_{0'}$ entre lesquelles le système fonctionne en lentille et en dehors desquelles le système agit en miroir; de même, à chaque valeur de $r'_{0'}$, il correspond, en principe, deux valeurs de $r_{0'}$ entre lesquelles le système fonctionne en lentille et en dehors desquelles il fonctionne en miroir.

Les formules précédentes permettent d'écrire immédiatement les équations de la trajectoire oblique dans l'approximation de Gauss.

On a, dans ce cas,

$$(297) \quad \begin{cases} r_1 = a \operatorname{ch} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \sin \beta(z + z_0) - \delta \right], \\ r_2 = A \cos \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{sh} \alpha z - \varphi \right], \\ r_3 = B \operatorname{sh} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \sin \beta(z - z_0) - \psi \right], \end{cases}$$

et suivant les conditions initiales :

$$(298) \quad \begin{cases} r_0 > \left| \frac{\sqrt{2}}{\beta} \gamma \right| : \\ \begin{cases} a^2 = r_0^2 - \frac{2}{\beta^2} \gamma^2, \\ \delta = -\operatorname{arc} \operatorname{th} \frac{\sqrt{2}}{\beta r_0} \gamma, \\ r_1 = a \operatorname{ch} [\quad], \\ A^2 = a^2 [\operatorname{ch}^2(\beta_0 - \delta) + \lambda^2 \operatorname{sh}^2(\beta_0 - \delta)], \\ \varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \lambda \operatorname{th}(\beta_0 - \delta) - \alpha_0; \end{cases} \end{cases}$$

$$(298') \quad \begin{cases} r_0 < \left| \frac{\sqrt{2}}{\beta} \gamma \right| : \\ \begin{cases} a^2 = \frac{2}{\beta^2} \gamma^2 - r_0^2, \\ \delta = -\operatorname{arc} \operatorname{th} \frac{\beta r_0}{\sqrt{2} \gamma}, \\ r_1 = a \operatorname{sh} [\quad], \\ A^2 = a^2 [\operatorname{sh}^2(\beta_0 - \delta) + \lambda^2 \operatorname{ch}^2(\beta_0 - \delta)], \\ \varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \lambda \operatorname{coth}(\beta_0 - \delta) - \alpha_0, \\ \lambda^2 = \frac{k}{1 - k}. \end{cases} \end{cases}$$

Les coefficients B et ψ seront ensuite déterminés à l'aide des relations (168).

Calcul des aberrations d'un point situé en dehors de l'axe.

La théorie des rayons obliques permet de calculer numériquement les aberrations géométriques d'un point situé en dehors de l'axe.

Soit r_0 la distance à l'axe du point-objet considéré. On déterminera d'abord l'image gaussienne de r_0 à l'aide de l'équation

$$(299) \quad r_P(z) = r_{0h}(z),$$

d'où $r_P(z)$ représente un rayon incident parallèle à l'axe et passant par r_0 et $r_{0h}(z)$ un rayon oblique quelconque passant par r_0 .

À l'extérieur de la lentille, cette relation peut être remplacée par les formules classiques $\frac{1}{p} - \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$

et $G = \frac{P'}{P}$; à l'intérieur de la lentille, seule l'équation (299) correspond à la réalité.

On calculera ensuite la marche du rayon transgaussien en fonction de γ et dans le plan de Gauss l'on déterminera la différence entre les ordonnées des points d'impact transgaussien et gaussien. On a $\Delta r = r_t(z) - r_g(z)$. On pourra ainsi construire la courbe des aberrations en fonction de γ et la caustique du point r_0 situé en dehors de l'axe.

Calcul des rayons gauches.

Nous supposons ici que la vitesse initiale de l'électron n'est pas située dans un plan passant par l'axe. Soient, r , θ , z , les coordonnées cylindriques d'un point, Oz étant toujours l'axe de révolution. En notant par un point une dérivation par rapport au temps, les équations du mouvement s'écrivent :

$$(300) \quad \begin{cases} \frac{m}{q} (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = \frac{\partial \phi}{\partial r}, \\ \frac{m}{q} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) = 0, \\ \frac{m}{q} \ddot{z} = \frac{\partial \phi}{\partial z}. \end{cases}$$

On peut associer à ces équations celle des forces vives

$$(301) \quad \frac{m}{q} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) = 2\alpha.$$

D'après nos hypothèses, on a

$$(236) \quad \phi(z, r) = \Phi(z) - \frac{r^2}{4} \Phi''(z),$$

d'où

$$(302) \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = \Phi'(z),$$

$$(303) \quad \frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{r}{2} \Phi''(z),$$

la virgule indiquant une dérivation par rapport à z .

Introduisons la nouvelle variable

$$(304) \quad u = r e^{i\theta},$$

On a

$$(305) \quad \frac{du}{dt} = e^{i\theta} (\dot{r} + i r \dot{\theta}),$$

$$(306) \quad \frac{d^2 u}{dt^2} = e^{i\theta} (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 + 2i \dot{r} \dot{\theta} + i r \ddot{\theta}).$$

Le système (300) s'écrit alors

$$(307) \quad \begin{cases} \frac{m}{q} \frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{\partial \phi}{\partial u}, \\ \frac{m}{q} \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{\partial \phi}{\partial z}. \end{cases}$$

Ce sont les équations d'une trajectoire méridienne dans le système u, z . Il suffit d'éliminer le temps entre ces deux relations pour retrouver l'équation (235). Or, nous avons résolu cette équation par le système (293). On peut, par conséquent, écrire, pour la zone fonctionnant en lentille,

$$(308) \quad \begin{cases} u_1 = a \operatorname{ch} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \sin(z + z_0) \sqrt{\frac{2\beta^2}{2 + a^2\beta^2} - \delta} \right], \\ u_2 = A \cos \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{sh} z \sqrt{\frac{2\alpha^2}{2 - A^2\alpha^2} - \varphi} \right], \\ u_3 = B \operatorname{sh} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \sin(z - z_1) \sqrt{\frac{2\beta^2}{2 + B^2\beta^2} - \psi} \right]. \end{cases}$$

Les coefficients a, δ, A, φ, B et ψ peuvent être déterminés en fonction des conditions initiales

$$(309) \quad \begin{cases} u_0 = r_0 e^{i\theta_0}, \\ u'_0 = e^{i\theta_0}(r'_0 + ir_0\theta'_0). \end{cases}$$

Pour chaque point z , la fonction $u(z)$ est donc parfaitement définie et calculable à partir des caractéristiques de la lentille et de l'état initial du rayon. On obtiendra immédiatement la distance du rayon à l'axe par la relation

$$(310_1) \quad r = |u|.$$

Pour calculer ensuite l'argument θ , on peut écrire la deuxième équation du système (300) sous la forme

$$(310_2) \quad 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0.$$

En utilisant les relations

$$(311) \quad \begin{cases} \dot{r} = r'\dot{z}, & \dot{\theta} = \theta'\dot{z}, & \ddot{\theta} = \theta''\dot{z}^2 + \theta'\ddot{z}; \\ (1 + r'^2 + r^2\theta'^2)\dot{z}^2 = \frac{2q}{m}\theta, & \ddot{z} = \frac{q}{m}\frac{\partial\theta}{\partial z}, \end{cases}$$

on trouve, tous calculs faits,

$$(312) \quad \theta'' = -\frac{1 + r'^2 + r^2\theta'^2}{2\theta} \frac{\partial\theta}{\partial z} \theta' - \frac{r'}{r} \theta'.$$

A l'aide des relations (304) et (308), toutes les quantités figurant dans le deuxième membre de (312) peuvent être exprimées en fonction de z , de θ et de θ' . C'est donc une équation de la forme

$$(313) \quad \theta'' = f(\theta', \theta, z)$$

qu'on peut résoudre par un procédé convenable d'intégration numérique, par exemple par la méthode de Störmer-Adams.

Dans le cas de l'approximation de Gauss, on calculera d'abord la fonction $u_g(z)$ à l'aide des relations (297).

L'équation (312) devient ici

$$(314) \quad r^2\theta' \sqrt{\frac{2e\Phi(z)}{m}} = r_0^2\theta'_0 \sqrt{\frac{2e\Phi(z_0)}{m}}.$$

On obtiendra donc θ par l'équation

$$(315) \quad \frac{d\theta}{dz} = \frac{r_0^2\theta'_0 \sqrt{\Phi(z_0)} e^{2i\theta}}{u_g(z) \sqrt{\Phi(z)}}.$$

La lentille à électrode épaisse en régime trans-gaussien.

1° Dans ce cas, le potentiel au centre $\Phi(0)$ est donné par la relation (196) et le potentiel à l'aplomb des électrodes extérieures $\Phi(z_2)$ par la formule (197). Lorsque $R_1 > z_1$, rien n'est à changer dans les équations donnant les trajectoires et les éléments optiques de la lentille. Par contre, lorsque $R_1 < z_1$, nous définirons une région centrale ($-k_1 z_2 < z < k_1 z_2$) à l'intérieur de laquelle le potentiel sera considéré comme constant.

On conçoit, en effet, que lorsque le rayon de l'électrode centrale est grand par rapport à l'épaisseur, la distribution du potentiel est sensiblement équivalente à celle de la lentille symétrique à électrodes minces; par contre, lorsque l'épaisseur de la pièce centrale est forte par rapport au rayon, la région centrale de la lentille peut être assimilée à un tube cylindrique à l'intérieur duquel le potentiel est sensiblement constant.

2° Les équations complètes de la trajectoire initialement parallèle à l'axe s'écriront dans ce cas :

$$(316) \quad \begin{cases} r_1 = r_0 \operatorname{ch} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \sin(z + z_2) \sqrt{\frac{2\beta^2}{2 + r_0^2\beta^2} - \delta} \right] & \text{pour } -z_2 < z < -k_2 z_2; \\ r_2 = A_1 \cos \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{sh}(z + k_1 z_2) \sqrt{\frac{2\alpha^2}{2 - A_1^2\alpha^2} - \varphi_1} \right] & \text{pour } -k_1 z_2 < z < -k_1 z_2; \\ r_3 = E z + F & \text{pour } -k_1 z_2 < z < k_1 z_2; \\ r_4 = A_2 \cos \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{sh}(z - k_1 z_2) \sqrt{\frac{2\alpha^2}{2 - A_2^2\alpha^2} - \varphi_2} \right] & \text{pour } k_1 z_2 < z < k_2 z_2; \\ r_5 = B \operatorname{sh} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \sin(z - z_2) \sqrt{\frac{2\beta^2}{2 + B^2\beta^2} - \psi} \right] & \text{pour } k_2 z_2 < z < z_2. \end{cases}$$

En généralisant les formules obtenues précédemment, on trouve pour les coefficients des trajectoires (nous nous bornons ici au cas $r_0 < r_{0l}$)

$$(317) \quad \begin{cases} \alpha = \frac{1}{z_2} \sqrt{\frac{1}{(1-k_1)(k-k_1)}} \sqrt{\frac{1-x}{x}}, \\ \beta = \frac{1}{z_2} \sqrt{\frac{1}{(1-k_1)(1-k)}} \sqrt{1-x}; \end{cases}$$

$$(318) \quad \begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc sh}(k-k_1) z_2 \sqrt{\frac{2x^2}{2-\Lambda_1^2 x^2}}, \\ \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc sh}(k-k_1) z_2 \sqrt{\frac{2x^2}{2-\Lambda_2^2 x^2}}, \\ \beta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc sin}(1-k) z_2 \sqrt{\frac{2\beta^2}{2+r_0^2 \beta^2}}, \\ \beta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc sin}(1-k) z_2 \sqrt{\frac{2\beta^2}{2+B^2 \beta^2}}; \end{cases}$$

$$(319) \quad \begin{cases} \lambda_1^2 = \frac{\left\{ \begin{aligned} &2(k-k_1)(1-k_1)x + (1-x) \\ &\times \left[2(k-k_1)^2 - \left(\frac{r_0}{z_2} \right)^2 \operatorname{ch}^2 \beta_1 \right] \end{aligned} \right\}}{\left\{ \begin{aligned} &2(1-k)(1-k_1) + (1-x) \\ &\times \left[\left(\frac{r_0}{z_2} \right)^2 \operatorname{ch}^2 \beta_1 - 2(1-k)^2 \right] \end{aligned} \right\}}, \\ \lambda_2^2 = \frac{\left\{ \begin{aligned} &2(k-k_1)(1-k_1) + (1-x) \\ &\times \left\{ 2(k-k_1)^2 - \left(\frac{\Lambda_2}{z_2} \right)^2 [1 \mp \sin^2(\alpha_2 - \varphi_2)] \right\} \end{aligned} \right\}}{\left\{ \begin{aligned} &2(1-k)(1-k_1) + (1-x) \\ &\times \left[\pm \left(\frac{\Lambda_2}{z_2} \right)^2 \cos^2(\alpha_2 - \varphi_2) - 2(1-k)^2 \right] \end{aligned} \right\}}; \end{cases}$$

$$(320) \quad \begin{cases} \Lambda_1^2 = r_0^2 (\operatorname{ch}^2 \beta_1 + \lambda_1^2 \operatorname{sh}^2 \beta_1), \\ \varphi_1 = \operatorname{arc tg} \lambda_1 \operatorname{th} \beta_1 - \alpha_1; \end{cases}$$

$$(321) \quad \begin{cases} E = \frac{\Lambda_1 \alpha}{\sqrt{2 - \Lambda_1^2 x^2}} \sin \varphi_1, \\ F = \Lambda_1 \left(\cos \varphi_1 + \frac{\alpha k_1 z_2}{\sqrt{2 - \Lambda_1^2 x^2}} \sin \varphi_1 \right); \end{cases}$$

$$(322) \quad \begin{cases} \Lambda_2^2 = \Lambda_1^2 \sin^2 \varphi_1 \\ \quad \times \frac{(2\alpha k_1 z_2 + \sqrt{2 - \Lambda_1^2 x^2} \cotg \varphi_1)^2 + 2}{2 - \Lambda_1^2 x^2 \cos^2 \varphi_1}, \\ \varphi_2 = \operatorname{arc tg} \frac{\sqrt{2 - \Lambda_2^2 x^2}}{2\alpha k_1 z_2 + \sqrt{2 - \Lambda_1^2 x^2} \cotg \varphi_1} \end{cases}$$

et suivant les valeurs de $K = \frac{1}{\lambda_2} \operatorname{tg}(\alpha_2 - \varphi_2)$:

$K < 1$:

$$(323_1) \quad \begin{cases} B^2 = \Lambda_2^2 \left[\cos^2(\alpha_2 - \varphi_2) - \frac{1}{\lambda_2^2} \sin^2(\alpha_2 - \varphi_2) \right], \\ \psi = \operatorname{arc th} \frac{1}{\lambda_2} \operatorname{tg}(\alpha_2 - \varphi_2) - \beta_2, \\ r_3 = B \operatorname{ch}[\quad]; \end{cases}$$

$|K| > 1$:

$$(323_2) \quad \begin{cases} B^2 = \Lambda_2^2 \left[\frac{1}{\lambda_2^2} \sin^2(\alpha_2 - \varphi_2) - \cos^2(\alpha_2 - \varphi_2) \right], \\ \psi = \operatorname{arc th} \lambda_2 \cotg(\alpha_2 - \varphi_2) - \beta_2, \\ r_3 = B \operatorname{sh}[\quad]. \end{cases}$$

Pour le tracé effectif de la trajectoire, on calculera dans l'ordre $\alpha, \beta, \beta_1, \lambda_1, \Lambda_1, \alpha_1, \varphi_1, E, F, \Lambda_2, \varphi_2, \alpha_2, B, \beta_2$ et ψ .

3° Pour le calcul de la distance focale, on peut encore appliquer la relation

$$f = - \frac{r_0}{\left(\frac{dr}{dz} \right)_{z=z_0}}.$$

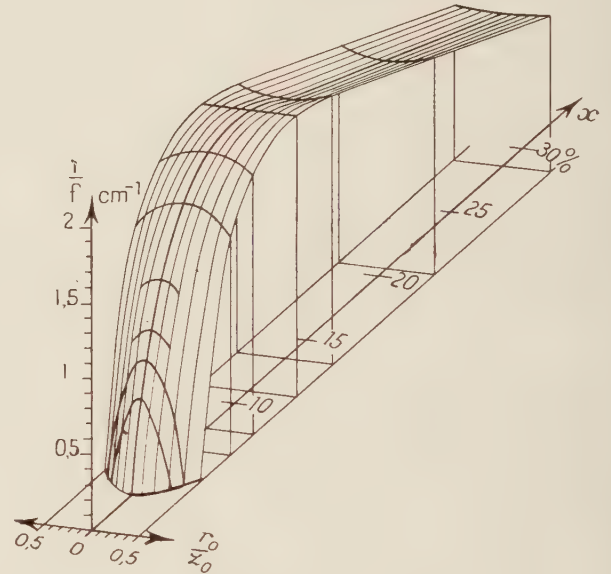


Fig. 57. — Surface $\frac{1}{f}$ mesurée par F. Heise [28].

On trouve, après des calculs un peu longs,

$$(324) \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2},$$

avec

$$(325) \quad \frac{1}{f_1} = \frac{\beta \Lambda_1}{r_0 \lambda_2} \sqrt{\frac{\operatorname{ch}^2 \beta_2 + \lambda_2^2 \operatorname{sh}^2 \beta_2}{2 + B^2 \beta^2}} < \begin{cases} \cos(\alpha_1 - \operatorname{arctg} \lambda_1 \operatorname{th} \beta_1) \\ < \sin(\alpha_2 - \operatorname{arctg} \lambda_2 \operatorname{th} \beta_2) \\ \sqrt{\frac{\Lambda_1^2 x^2}{2 - \Lambda_1^2 x^2}} \sin(\alpha_1 - \operatorname{arctg} \lambda_1 \operatorname{th} \beta_1) \\ \quad \cdot \cos(\alpha_2 - \operatorname{arctg} \lambda_2 \operatorname{th} \beta_2) \end{cases};$$

$$(326) \quad \frac{1}{f_2} = \frac{2\alpha \beta k_1 z_2 \Lambda_1}{r_0 \lambda_2 \sqrt{2 - \Lambda_1^2 x^2} \sqrt{2 + B^2 \beta^2}} \times \sqrt{\operatorname{ch}^2 \beta_2 + \lambda_2^2 \operatorname{sh}^2 \beta_2} \sin(\alpha_1 - \operatorname{arctg} \lambda_1 \operatorname{th} \beta_1) < \sin(\alpha_2 - \operatorname{arctg} \lambda_2 \operatorname{th} \beta_2).$$

Comme dans le cas gaussien, la lentille peut être considérée ici comme un système de deux lentilles minces accolées.

Le terme $\frac{1}{f_1}$ correspond à la distance focale de la lentille à électrodes minces. Pour $A_2 = A_1$, l'expression (325) se réduit à (254).

Le terme $\frac{1}{f_2}$ représente la contribution due à l'épaisseur. Contrairement à ce qui se passe dans le cas gaussien (où $\frac{1}{f_2}$ est constamment négatif), $\frac{1}{f_2}$ peut être positif ou négatif. Dans la région où la distance focale est positive (zone normale de fonctionnement), la convergence de la lentille pourra donc augmenter ou diminuer lorsqu'on s'éloigne de l'axe, suivant la valeur de x .

Toutes ces conclusions sont bien vérifiées par le relevé expérimental (fig. 57) de la surface $\frac{1}{f} = \text{fonction} \left(x, \frac{r_0}{z_0} \right)$ [28]. On remarque notamment qu'au point où $\frac{1}{f}$ est maximum, la distance focale est indépendante de l'incidence $\frac{r_0}{z_0}$. Le point remarquable de la surface $\frac{1}{f}$ peut donc être déterminé en se limitant au régime gaussien, comme nous l'avons fait dans les calculs que nous avons effectués sur la réduction des aberrations d'ellipticité, de sphéricité et de distorsion.

Limites de la théorie exposée.

Nous avons pu établir des formules reliant directement les propriétés optiques de la lentille électrostatique indépendante à sa structure géométrique et aux tensions qui lui sont appliquées. Ces formules coordonnent correctement l'ensemble des propriétés des lentilles et des miroirs, telles qu'elles sont fournies par l'expérience; en outre, elles permettent de prévoir les conditions dans lesquelles il faut se placer pour réaliser un certain mode de fonctionnement (par exemple passage au miroir), ou en particulier un fonctionnement optimum (par exemple élimination des aberrations de distorsion).

Cependant, la théorie exposée n'est pas parfaite.

1° Nous avons représenté la répartition du potentiel sur l'axe par un système de trois paraboles, raccordées aux points d'inflexion $\zeta = \pm kz_0$ (ou $\zeta = \pm kz_2$). Cette représentation entraîne la constance de la dérivée seconde dans les trois régions de la lentille et son passage brusque d'une valeur positive à une valeur négative (fig. 7).

2° Dans l'approximation de Gauss, le raccordement du potentiel est effectué jusqu'à la dérivée première. En régime transgaussien par contre, les valeurs du potentiel en dehors de l'axe qui sont introduites dans le calcul, diffèrent très légèrement de part et d'autre du point d'inflexion. Néanmoins, la théorie tient compte du fait essentiel caractérisant le régime transgaussien : dans les régions d'incidence et d'émergence le potentiel croît lorsqu'on s'éloigne de l'axe, tandis que dans la région centrale, le potentiel diminue lorsqu'on s'éloigne de l'axe.

3° Nous avons supposé $\Phi'(z_0) = 0$. Cette hypothèse n'est évidemment pas réalisée en pratique, car le potentiel atteint la valeur constante qu'il possède à l'extérieur de la lentille pour des valeurs un peu plus fortes de z , par exemple $1,1z_0$ ou $1,2z_0$ (fig. 11). Toutefois, l'erreur ainsi introduite est très faible, car elle affecte une région où la vitesse de l'électron est très forte et où l'influence du champ est par conséquent très faible.

Les imperfections énumérées peuvent avoir comme conséquence de légères déformations de la trajectoire et partant, l'existence de légères différences entre les propriétés optiques calculées et celles observées expérimentalement. Il ne s'agit toutefois que de différences de détail car, dans tous les cas, les relations que nous avons établies décrivent correctement l'allure des phénomènes.

Comment pourrait-on perfectionner la théorie ?

En perfectionnant la représentation du potentiel. Si, à la place des paraboles (32) on utilise une quartique (34), on améliore très sensiblement la représentation de la dérivée seconde. Malheureusement, les équations différentielles des trajectoires deviennent très compliquées dans ce cas et l'on perd entièrement le bénéfice d'une vue synoptique des propriétés des lentilles.

Cette remarque est valable *a fortiori* lorsqu'on utilise une courbe du sixième degré (36) pour représenter le potentiel sur l'axe.

Pour parfaire la théorie, on aura alors avantage à revenir sur l'équation (12). On calculera numériquement cette expression, ainsi que ses n premières dérivées (en pratique, la connaissance des dérivées seconde, quatrième et sixième suffira amplement lorsque les trajectoires ne passeront pas au voisinage immédiat des électrodes). On introduira ensuite ces valeurs dans le système d'équations différentielles (8) qu'on pourra résoudre avec le degré de précision voulue par un procédé convenable d'intégration numérique. On connaîtra ainsi la trajectoire complète de l'électron dans la lentille et l'on en déduira ses caractéristiques optiques.

L'application de cette méthode, qui nécessite un effort considérable de calcul numérique, pourra être grandement facilitée par la mise en œuvre de machines à calculer électroniques conçues spécialement pour résoudre des équations différentielles du type (8). Des machines de ce genre sont actuellement à l'étude au Laboratoire du Professeur P. Grivet [29].

Figures de caustiques obtenues avec une lentille elliptique fonctionnant en régime transgaussien.

Considérons une lentille électrostatique indépendante fonctionnant en régime transgaussien. Suppo-

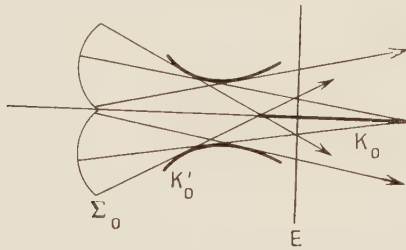


Fig. 58.

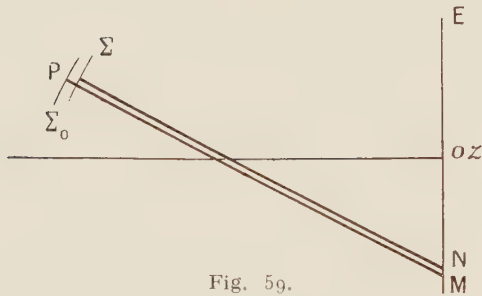


Fig. 59.

sons d'abord que le système présente une symétrie de révolution parfaite. Les rayons électroniques admettent alors une surface d'onde de révolution dont la méridienne est du type Σ_0 (fig. 58). La caustique correspondante comprendra deux nappes : une portion de l'axe K_0 et une surface de révolution de méridienne K'_0 . Dans le plan matérialisé par l'écran E, on aura une accumulation de lumière à l'intersection de E avec les deux nappes de la caustique.

Supposons maintenant que la lentille est légèrement elliptique. Le défaut de symétrie se répercutera sur Σ_0 qui deviendra Σ (fig. 59). Si $z = f(r)$ est l'équation de Σ_0 , celle de Σ sera de la forme

$$(327) \quad z = f(r) + g(r) \cos 2(\theta - \theta_0),$$

ou sensiblement

$$(328) \quad z = f(r) + a \cos 2(\theta - \theta_0).$$

Étudions alors l'accumulation de lumière sur l'écran E.

Étant donné le point P(r, θ) de Σ_0 donnant naissance au point M sur E, le même point P(r, θ) de Σ donnera sur E le point N, défini sensiblement pour la figure 60. N s'obtient à partir de M en portant

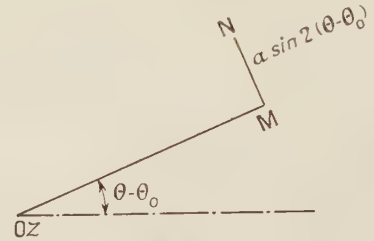


Fig. 60.

la longueur $a \sin 2(\theta - \theta_0)$ perpendiculairement au rayon vecteur OM. Dans la suite, nous supposons $\theta_0 = 0$.

Dans le cas de la symétrie de révolution, les rayons passant par le plan méridien $\theta = \text{const.}$ donneront une trace méridienne et rectiligne $\theta = \text{const.}$; ils donnent maintenant une trace encore rectiligne, mais décalée de $a \sin 2\theta$ (fig. 61). On aura la trace de la caustique, c'est-à-dire l'accumulation de lumière dans E en traçant toutes ces droites et en prenant

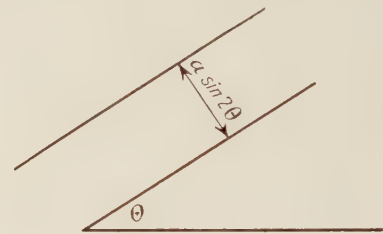


Fig. 61.

leur enveloppe (fig. 62). On obtient ainsi une hypocycloïde à quatre rebroussements, en bon accord avec la figure effectivement fournie par l'expérience (fig. 63) [30].

Figures de caustiques résultant de dissymétries d'ordre supérieur.

Lorsque le champ présente une superposition de défauts de symétrie de différents ordres, l'équation de la surface d'onde sera de la forme

$$(329) \quad z = f(r) + \sum_{m=0}^m a_m \cos m\theta.$$

Le point N du paragraphe précédent sera obtenu

auront pour trace dans l'écran E une droite D définie par θ et Δ (fig. 64).



Fig. 62.

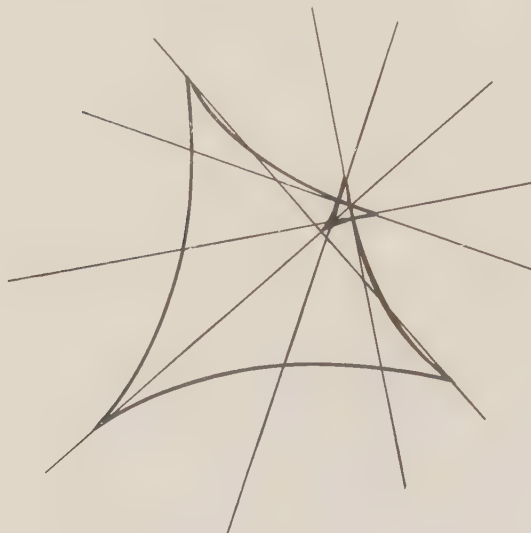


Fig. 65.



Fig. 63.

à partir du M en portant la longueur $\Delta = \sum_0^m a_m \sin m\theta$ perpendiculairement au rayon vecteur. Les rayons passant initialement par le plan méridien $\theta = \text{const.}$

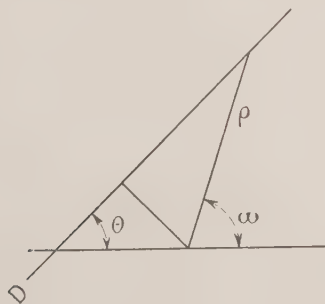


Fig. 64.

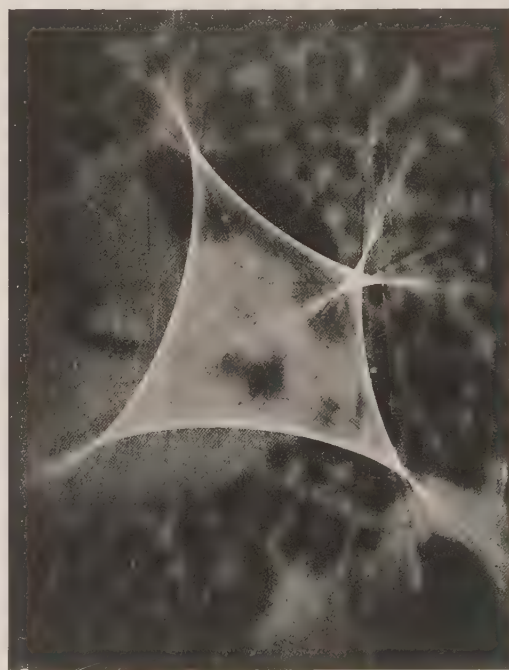


Fig. 66.

En coordonnées polaires ρ , ω l'équation de la droite D sera

$$(330) \quad \rho \sin(\omega - \theta) - \sum_0^m a_m \sin m\theta = 0.$$

Lorsque θ varie, la droite D engendrera une enveloppe dont les équations seront :

$$(331) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho^2 = \left(\sum_0^m a_m \sin m\theta \right)^2 + \left(\sum_0^m m a_m \cos m\theta \right)^2, \\ \omega = \theta - \arctg \frac{\sum_0^m a_m \sin m\theta}{\sum_0^m m a_m \cos m\theta}. \end{array} \right.$$

La figure 65 montre l'enveloppe obtenue dans le



Fig. 67.

cas d'une superposition de défauts d'ordre deux et trois et en faisant $a_3 = 0,5 a_2$. La figure 66 montre la photographie obtenue expérimentalement [31]. Les



Fig. 68.

figures 67 et 68 montrent les clichés obtenus dans le cas de superpositions plus compliquées.

APPENDICE I.

Calcul de B et ψ dans le cas gaussien.

Nous allons partir des relations

$$r_2 \left(\frac{2}{3} z_0 \right) = r_3 \left(\frac{2}{3} z_0 \right), \quad r'_2 \left(\frac{2}{3} z_0 \right) = r'_3 \left(\frac{2}{3} z_0 \right).$$

a. En prenant le symbole supérieur dans la dernière équation du système (6g), on a

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} A \cos(\alpha_0 - \varphi) = B \operatorname{ch}(\beta_0 + \psi), \\ A \sin(\alpha_0 - \varphi) \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \frac{\alpha_0^2 z_0^2}{9}}} \\ = B \operatorname{sh}(\beta_0 + \psi) \frac{\beta}{\sqrt{1 - \frac{\beta_0^2 z_0^2}{9}}}. \end{array} \right.$$

Les équations (1) s'écrivent, en tenant compte de (74),

$$(1') \quad \left\{ \begin{array}{l} A \cos(\alpha_0 - \varphi) = B \operatorname{ch}(\beta_0 + \psi), \\ \frac{A}{\sqrt{2}} \sin(\alpha_0 - \varphi) = B \operatorname{sh}(\beta_0 + \psi). \end{array} \right.$$

Il en résulte

$$B^2 = A^2 \left[\cos^2(\alpha_0 - \varphi) - \frac{1}{2} \sin^2(\alpha_0 - \varphi) \right],$$

$$\operatorname{th}(\beta_0 + \psi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg}(\alpha_0 - \varphi),$$

et finalement

$$(II) \quad \boxed{\begin{array}{l} B^2 = A^2 \left[1 - \frac{3}{2} \sin^2(\alpha_0 - \varphi) \right] \\ \psi = \arctg \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg}(\alpha_0 - \varphi) - \beta_0. \end{array}}$$

Il est évident que les deux dernières formules n'ont de signification que lorsque

$$|K| = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg}(\alpha_0 - \varphi) \right| < 1.$$

b. Dans le cas où $|K| > 1$, c'est le symbole inférieur qu'on doit prendre dans la dernière relation du système (6g).

Les équations (I') deviennent, dans ce cas,

$$(I_1) \quad \begin{cases} A \cos(\alpha_0 - \varphi) = -B \operatorname{sh}(\beta_0 + \psi), \\ -\frac{A}{\sqrt{2}} \sin(\alpha_0 - \varphi) = B \operatorname{ch}(\beta_0 + \varphi) \end{cases}$$

d'où

$$(II_1) \quad \begin{cases} B^2 = A^2 \left[\frac{3}{2} \sin^2(\alpha_0 - \varphi) - 1 \right], \\ \psi = \operatorname{arc th} \sqrt{2} \cotg(\alpha_0 - \varphi) - \beta_0. \end{cases}$$

c. Supposons maintenant

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg}(\alpha_0 - \varphi) = 1.$$

Il en résulte

$$\sin(\alpha_0 - \varphi) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos(\alpha_0 - \varphi) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ \psi = \infty, \quad B = 0.$$

Les formes $B \frac{\operatorname{ch}}{\operatorname{sh}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc sin} \beta(z - z_0) - \psi \right]$ deviennent indéterminées. On peut lever l'indétermination en développant l'une ou l'autre des expressions précédentes.

On a, par exemple :

$$\begin{aligned} r_3 &= B \frac{\operatorname{ch}}{\operatorname{sh}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc sin} \beta(z - z_0) - \psi \right] \\ &= B \left\{ \frac{\operatorname{ch}}{\operatorname{sh}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc sin} \beta(z - z_0) \right] \frac{\operatorname{ch} \psi}{\operatorname{sh} \psi} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc sin} \beta(z - z_0) \right] \frac{\operatorname{sh} \psi}{\operatorname{ch} \psi} \right\} \\ &= A \sqrt{1 - \frac{3}{2} \sin^2(\alpha_0 - \varphi)} \\ &\quad \times \left\{ \frac{\operatorname{ch} \beta_0 - \operatorname{sh} \beta_0 \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg}(\alpha_0 - \varphi)}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2(\alpha_0 - \varphi)}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\operatorname{sh} \beta_0 \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg}(\alpha_0 - \varphi) - \operatorname{ch} \beta_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2(\alpha_0 - \varphi)}} \right\} \\ &= A \left\{ \frac{\operatorname{ch}}{\operatorname{sh}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc sin} \beta(z - z_0) \right] \left[\frac{\operatorname{ch} \beta_0 \cos(\alpha_0 - \varphi)}{\sqrt{2}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sh} \beta_0 \sin(\alpha_0 - \varphi) \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc sin} \beta(z - z_0) \right] \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{ch} \beta_0 \sin(\alpha_0 - \varphi) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \operatorname{sh} \beta_0 \cos(\alpha_0 - \varphi) \right] \right\} \\ &= A \left\{ \frac{\operatorname{ch}}{\operatorname{sh}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc sin} \beta(z - z_0) \right] \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\beta_0} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc sin} \beta(z - z_0) \right] \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\beta_0} \right\} \\ &= \frac{A}{\sqrt{3}} e^{-\beta_0} e^{\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc sin} \beta(z - z_0)}. \end{aligned}$$

On démontrerait, d'une manière analogue, que lorsque

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg}(\alpha_0 - \varphi) = -1,$$

l'expression du rayon émergent se réduit à

$$r_3 = \frac{A}{\sqrt{3}} e^{\beta_0} e^{\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc sin} \beta(z - z_0)}.$$

APPENDICE II.

Calcul des éléments cardinaux de la lentille indépendante à électrode centrale épaisse.

Lorsque $z_1 < R_1$, les formules établies pour les lentilles minces restent valables. Nous supposons ici $z_1 > R_1$.

1° On a

$$f = - \frac{r_0}{\left(\frac{dr}{dz} \right)_{z=z_2}},$$

soit, pour $|K| < 1$,

$$f = \frac{r_0 \sqrt{2}}{\beta B \operatorname{sh} \psi}.$$

Les relations (212), (213) et (214) permettent d'exprimer ces formules. On a d'abord

$$\operatorname{sh} \psi = \frac{\frac{1}{\lambda} \sin(\alpha_0 - \varphi_1) \operatorname{ch} \beta_0 - \cos(\alpha_0 - \varphi_1) \operatorname{sh} \beta_0}{\sqrt{\cos^2(\alpha_0 - \varphi_1) - \frac{1}{\lambda^2} \sin^2(\alpha_0 - \varphi_1)}},$$

d'où

$$\begin{aligned} B \operatorname{sh} \psi &= A_1 \left[\frac{1}{\lambda} \sin(\alpha_0 - \varphi_1) \operatorname{ch} \beta_0 - \cos(\alpha_0 - \varphi_1) \operatorname{sh} \beta_0 \right] \\ &= A_1 \left[\frac{1}{\lambda} (\sin \alpha_0 \cos \varphi_1 - \cos \alpha_0 \sin \varphi_1) \operatorname{ch} \beta_0 \right. \\ &\quad \left. - (\cos \alpha_0 \cos \varphi_1 + \sin \alpha_0 \sin \varphi_1) \operatorname{sh} \beta_0 \right] \\ &= A_1 \left[\cos \varphi_1 \left(\frac{1}{\lambda} \sin \alpha_0 \operatorname{ch} \beta_0 - \cos \alpha_0 \operatorname{sh} \beta_0 \right) \right. \\ &\quad \left. - \sin \varphi_1 \left(\frac{1}{\lambda} \cos \alpha_0 \operatorname{ch} \beta_0 + \sin \alpha_0 \operatorname{sh} \beta_0 \right) \right]. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} A_1 \sin \varphi_1 &= A \sin \varphi, \\ A_1 \cos \varphi_1 &= A (\cos \varphi + \sqrt{2} \alpha k_1 z_2 \sin \varphi). \end{aligned}$$

Il vient donc

$$\begin{aligned} B \operatorname{sh} \psi &= A \left[(\cos \varphi + \sqrt{2} \alpha k_1 z_2 \sin \varphi) \right. \\ &\quad \times \left(\frac{1}{\lambda} \sin \alpha_0 \operatorname{ch} \beta_0 - \cos \alpha_0 \operatorname{sh} \beta_0 \right) \\ &\quad \left. - \sin \varphi \left(\frac{1}{\lambda} \cos \alpha_0 \operatorname{ch} \beta_0 + \sin \alpha_0 \operatorname{sh} \beta_0 \right) \right] \\ &= A \left\{ \cos \varphi \left(\frac{1}{\lambda} \sin \alpha_0 \operatorname{ch} \beta_0 - \cos \alpha_0 \operatorname{sh} \beta_0 \right) \right. \end{aligned}$$

$$+ \sin \varphi \left[\sqrt{2} \alpha k_1 z_2 \right. \\ \times \left(\frac{1}{\lambda} \sin \alpha_0 \operatorname{ch} \beta_0 - \cos \alpha_0 \operatorname{sh} \beta_0 \right) \\ \left. - \frac{1}{\lambda} \cos \alpha_0 \operatorname{ch} \beta_0 - \sin \alpha_0 \operatorname{sh} \beta_0 \right] \Bigg\}.$$

Par ailleurs,

$$\sin \varphi = \frac{\lambda \operatorname{th} \beta_0 \cos \alpha_0 - \sin \alpha_0}{\sqrt{1 + \lambda^2 \operatorname{th}^2 \beta_0}} = \frac{\lambda \cos \alpha_0 \operatorname{sh} \beta_0 - \sin \alpha_0 \operatorname{ch} \beta_0}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \beta_0 + \lambda^2 \operatorname{sh}^2 \beta_0}}$$

et

$$\cos \varphi = \frac{\cos \alpha_0 + \lambda \operatorname{th} \beta_0 \sin \alpha_0}{\sqrt{1 + \lambda^2 \operatorname{th}^2 \beta_0}} = \frac{\cos \alpha_0 \operatorname{ch} \beta_0 + \lambda \sin \alpha_0 \operatorname{sh} \beta_0}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \beta_0 + \lambda^2 \operatorname{sh}^2 \beta_0}}.$$

Il en résulte

$$B \operatorname{sh} \psi = r_0 \left\{ \begin{aligned} & (\cos \alpha_0 \operatorname{ch} \beta_0 + \lambda \sin \alpha_0 \operatorname{sh} \beta_0) \\ & \times \left(\frac{1}{\lambda} \sin \alpha_0 \operatorname{ch} \beta_0 - \cos \alpha_0 \operatorname{sh} \beta_0 \right) \\ & + (\lambda \cos \alpha_0 \operatorname{sh} \beta_0 - \sin \alpha_0 \operatorname{ch} \beta_0) \\ & \times \left[\sqrt{2} \alpha k_1 z_2 \left(\frac{1}{\lambda} \sin \alpha_0 \operatorname{ch} \beta_0 - \cos \alpha_0 \operatorname{sh} \beta_0 \right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{\lambda} \cos \alpha_0 \operatorname{ch} \beta_0 - \sin \alpha_0 \operatorname{sh} \beta_0 \right] \Bigg\} \\ = r_0 \left\{ \sin 2 \alpha_0 \left(\frac{\operatorname{ch}^2 \beta_0}{\lambda} - \lambda \operatorname{sh}^2 \beta_0 \right) \right. \\ & \quad \left. - \cos 2 \alpha_0 \operatorname{sh} 2 \beta_0 + \sqrt{2} \alpha k_1 z_2 \right. \\ & \quad \times \left[\frac{1}{2} \sin 2 \alpha_0 \operatorname{sh} 2 \beta_0 - \frac{\sin^2 \alpha_0 \operatorname{ch}^2 \beta_0}{\lambda} \right. \\ & \quad \left. \left. - \lambda \cos^2 \alpha_0 \operatorname{sh}^2 \beta_0 \right] \right\}. \end{aligned}$$

La quantité entre crochets s'écrit

$$\frac{1}{2\lambda} (\lambda \sin 2 \alpha_0 \operatorname{sh} 2 \beta_0 - 2 \sin^2 \alpha_0 \operatorname{ch}^2 \beta_0 - 2 \lambda^2 \cos^2 \alpha_0 \operatorname{sh}^2 \beta_0) \\ = \frac{\cos^2 \alpha_0 \operatorname{ch}^2 \beta_0}{2\lambda} (2 \lambda \operatorname{tg} \alpha_0 \operatorname{th} \beta_0 - 2 \operatorname{tg}^2 \alpha_0 - 2 \lambda^2 \operatorname{th}^2 \beta_0) \\ = - \frac{\cos^2 \alpha_0 \operatorname{ch}^2 \beta_0}{\lambda} (\operatorname{tg} \alpha_0 - \lambda \operatorname{th} \beta_0)^2,$$

d'où l'expression de $\frac{1}{f_2}$.

D'autre part, la quantité

$$\sin 2 \alpha_0 (\operatorname{ch}^2 \beta_0 - \lambda^2 \operatorname{sh}^2 \beta_0) - \lambda \cos 2 \alpha_0 \operatorname{sh} 2 \beta_0$$

est aisément transformable en $L \sin (2 \alpha_0 - \chi)$, avec

$$L = \operatorname{ch}^2 \beta_0 + \lambda^2 \operatorname{sh}^2 \beta_0, \quad \operatorname{tg} \chi = \frac{2 \lambda \operatorname{th} \beta_0}{1 - \lambda^2 \operatorname{th}^2 \beta_0},$$

d'où l'expression de $\frac{1}{f_1}$.

Pour une lentille mince à point d'inflexion variable on a [relation (166)]

$$\lambda^2 = \frac{k}{1 - k}.$$

Il vient alors

$$L = \operatorname{ch}^2 \beta_0 + \frac{k}{1 - k} \operatorname{sh}^2 \beta_0,$$

soit

$$L = \frac{1}{1 - k} (\operatorname{ch}^2 \beta_0 - k),$$

d'où la relation (170).

Lorsque $|K| > 1$, des calculs analogues conduisent aux mêmes formules.

2° On a, pour $|K| < 1$:

$$z_F = z_0 + \frac{\sqrt{2}}{\beta} \coth \psi, \quad z_P = z_F - f.$$

Or,

$$\coth \psi = \coth \left[\operatorname{arcth} \frac{1}{\lambda} \operatorname{tg} (\alpha_0 - \varphi_1) - \beta_0 \right] \\ = \frac{\lambda \cos (\alpha_0 - \varphi_1) \operatorname{ch} \beta_0 - \sin (\alpha_0 - \varphi_1) \operatorname{sh} \beta_0}{\sin (\alpha_0 - \varphi_1) \operatorname{ch} \beta_0 - \lambda \cos (\alpha_0 - \varphi_1) \operatorname{sh} \beta_0}.$$

Par ailleurs, les relations (213) fournissent

$$\sin \varphi_1 = \frac{\Lambda}{\Lambda_1} \sin \varphi,$$

$$\cos \varphi_1 = \frac{\Lambda}{\Lambda_1} (\cos \varphi + \sqrt{2} \alpha k_1 z_2 \sin \varphi),$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \lambda \operatorname{th} \beta_0 - \alpha_0.$$

En introduisant ces quantités dans l'expression de $\coth \psi$, on trouve, tous calculs faits, les formules (221) et (222).

Les résultats restent valables pour K quelconque.

APPENDICE III.

Calcul de A , B , φ et ψ dans le cas transgaussien.

a. $r_0 < r_{0l}$. — A partir des relations

$$\alpha = \frac{1}{z_0} \sqrt{\frac{1}{k} \frac{1-x}{x}}, \quad \beta = \frac{1}{z_0} \sqrt{\frac{1}{1-k} (1-x)},$$

nous définirons les quantités

$$(I) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arsh} k z_0 \sqrt{\frac{2 \alpha^2}{2 - \Lambda^2 \alpha^2}}, \\ \beta_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arcsin} (1 - k) z_0 \sqrt{\frac{2 \beta^2}{2 + r_0^2 \beta^2}}, \\ \beta_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arcsin} (1 - k) z_0 \sqrt{\frac{2 \beta^2}{2 - B^2 \beta^2}}, \end{aligned} \right.$$

qui généralisent les définitions établies dans le cas gaussien. Les relations

$$r_1 (-k z_0) = r_2 (-k z_0), \quad r'_1 (-k z_0) = r'_2 (-k z_0)$$

fournissent ensuite les deux équations

$$r_0 \operatorname{ch} \beta_1 = \Lambda \cos (\alpha_0 + \varphi), \\ r_0 \operatorname{sh} \beta_1 \frac{\beta}{\sqrt{2 + r_0^2 \beta^2 - 2 \beta^2 (1 - k)^2 z_0^2}} \\ = \Lambda \sin (\alpha_0 + \varphi) \frac{\alpha}{\sqrt{2 - \Lambda^2 \alpha^2 + 2 \alpha^2 k^2 z_0^2}},$$

que nous écrirons

$$(II) \quad \begin{cases} r_0 \operatorname{ch} \beta_1 = A \cos(\alpha_0 + \varphi), \\ \lambda_1 r_0 \operatorname{sh} \beta_1 = A \sin(\alpha_0 + \varphi), \end{cases}$$

avec

$$(III) \quad \lambda_1^2 = \frac{\beta_1^2}{x^2} \frac{2 - A^2 \alpha^2 + 2 \alpha^2 k^2 z_0^2}{2 + r_0^2 \beta_1^2 - 2 \beta_1^2 (1-k)^2 z_0^2} \\ = \frac{2 k x + (1-x) \left[2 k^2 - \left(\frac{A}{z_0} \right)^2 \right]}{2(1-k) + (1-x) \left[\left(\frac{r_0}{z_0} \right)^2 - 2(1-k)^2 \right]}.$$

Le système (II) fournit

$$(IV) \quad \begin{cases} A^2 = r_0^2 (\operatorname{ch}^2 \beta_1 + \lambda_1^2 \operatorname{sh}^2 \beta_1), \\ \varphi = \operatorname{arctg} \lambda_1 \operatorname{th} \beta_1 - \alpha_0. \end{cases}$$

Il est encore nécessaire de mettre λ_1 sous une forme ne dépendant pas de $\left(\frac{A}{z_0} \right)$. On y arrive en substituant la première des relations (IV) dans (III). En résolvant par rapport à λ_1^2 l'équation ainsi obtenue, on trouve

$$(V) \quad \lambda_1^2 = \frac{2 k x + (1-x) \left[2 k^2 - \left(\frac{r_0}{z_0} \right)^2 \operatorname{ch}^2 \beta_1 \right]}{2(1-k) + (1-x) \left[\left(\frac{r_0}{z_0} \right)^2 \operatorname{ch}^2 \beta_1 - 2(1-k)^2 \right]}.$$

Les systèmes (IV) et (I) permettront alors de calculer A et φ . Les relations

$$r_2(k z_0) = r_3(k z_0), \quad r'_2(k z_0) = r'_3(k z_0)$$

fournissent ensuite B et ψ à l'aide de calculs semblables. On trouve, suivant les valeurs de la quantité $K = \frac{1}{\lambda_2} \operatorname{tg}(\alpha_0 - \varphi)$:

$$|K| < 1 : \\ (VI_a) \quad \begin{cases} B^2 = A^2 \left[\cos^2(\alpha_0 - \varphi) - \frac{1}{\lambda_2^2} \sin^2(\alpha_0 - \varphi) \right], \\ \psi = \operatorname{arctg} \frac{1}{\lambda_2} \operatorname{tg}(\alpha_0 - \varphi) - \beta_2, \\ r_3 = B \operatorname{ch} [\quad]; \end{cases}$$

$|K| > 1 :$

$$(VI_b) \quad \begin{cases} B^2 = A^2 \left[\frac{1}{\lambda_2^2} \sin^2(\alpha_0 - \varphi) - \cos^2(\alpha_0 - \varphi) \right], \\ \psi = \operatorname{arctg} \lambda_2 \operatorname{cotg}(\beta_0 - \varphi) - \beta_2, \\ r_3 = B \operatorname{sh} [\quad]; \end{cases}$$

avec

$$(VII) \quad \lambda_2^2 = \frac{2 k x + (1-x) \left\{ 2 k^2 - \left(\frac{A}{z_0} \right)^2 [1 \mp \sin^2(\alpha_0 - \varphi)] \right\}}{\left\{ 2(1-k) + (1-x) \right. \\ \left. \times \left[\pm \left(\frac{A}{z_0} \right)^2 \cos^2(\alpha_0 - \varphi) - 2(1-k)^2 \right] \right\}}.$$

b. $r_0 > r_0'$. — La définition de α_0 est à changer en

$$\alpha'_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} k z_0 \sqrt{\frac{2 \alpha^2}{A^2 z_0^2 - 2}}.$$

On obtient ainsi

$$(IV') \quad \begin{cases} A^2 = r_0'^2 (\operatorname{ch}^2 \beta_1 + \lambda_1'^2 \operatorname{sh}^2 \beta_1), \\ \varphi = \alpha'_0 - \operatorname{arctg} \lambda_1 \operatorname{th} \beta_1. \end{cases}$$

λ_1 ayant la valeur donnée plus haut, et suivant les valeurs de

$$K' = \frac{1}{\lambda_1'} \operatorname{tg}(\alpha'_0 + \varphi),$$

$|K'| < 1 :$

$$(VI'_a) \quad \begin{cases} B^2 = A^2 \left[\cos^2(\alpha'_0 + \varphi) - \frac{1}{\lambda_2'^2} \sin^2(\alpha'_0 + \varphi) \right], \\ \psi = \beta_2 - \operatorname{arctg} \frac{1}{\lambda_2'} \operatorname{tg}(\alpha'_0 + \varphi), \\ r_3 = B \operatorname{ch} [\quad]; \end{cases}$$

$|K'| > 1 :$

$$(VI'_b) \quad \begin{cases} B^2 = A^2 \left[\frac{1}{\lambda_2'^2} \sin^2(\alpha'_0 + \varphi) - \cos^2(\alpha'_0 + \varphi) \right], \\ \psi = \beta_2 - \operatorname{arctg} \lambda_2' \operatorname{cotg}(\alpha'_0 + \varphi), \\ r_3 = B \operatorname{sh} [\quad]; \end{cases}$$

avec

$$(VII') \quad \lambda_2'^2 = \frac{2 k x + (1-x) \left\{ 2 k^2 - \left(\frac{A}{z_0} \right)^2 [1 \mp \sin^2(\alpha'_0 + \varphi)] \right\}}{\left\{ 2(1-k) + (1-x) \right. \\ \left. \times \left[\pm \left(\frac{A}{z_0} \right)^2 \cos^2(\alpha'_0 + \varphi) - 2(1-k)^2 \right] \right\}}.$$

c. r_0' imaginaire. — Tant que la réflexion de l'électron a lieu dans la région centrale, les formules établies en b restent valables, à condition d'y remplacer α par

$$\alpha' = i x = \frac{1}{z_0} \sqrt{\frac{1}{k} \frac{x-1}{x}}.$$

Dans le cas où la réflexion a lieu dans la région d'incidence même, on trouve $B = r_0$.

CONCLUSION.

En prenant comme hypothèse l'association linéaire des potentiels produits par les électrodes, j'ai établi une expression analytique pour la répartition du potentiel sur l'axe de la lentille électrostatique indépendante.

A partir de cette expression, j'ai calculé le potentiel au centre de la lentille $\Phi(0)$ et le potentiel à l'aplomb des électrodes extérieures. Le rapport fondamental $x = \frac{\Phi(0)}{\Phi(z_0)}$ est ainsi entièrement déterminé.

A titre d'application, j'ai calculé le passage de la lentille au miroir et les éléments cardinaux des lentilles de convergence moyenne et faible.

J'ai décomposé ensuite l'expression du potentiel

sur l'axe en formes tangentes simples qui permettent de pousser jusqu'au bout l'intégration des équations différentielles qui déterminent les trajectoires de Gauss. J'ai discuté en détail la marche des rayons principaux et calculé numériquement les trajectoires électroniques en fonction du paramètre x .

Une fois en possession des formules explicites qui régissent les trajectoires de Gauss, j'ai pu établir des expressions relativement simples donnant directement les principaux paramètres de la lentille (distances focales, plans principaux, etc.) en fonction de sa structure géométrique et électrique. Des applications pratiques montrent l'intérêt de la théorie, qui englobe également le cas des lentilles à électrode centrale positive.

J'ai étudié ensuite le cas du miroir qui s'obtient dans cette théorie en changeant le signe du paramètre fondamental x . L'arsenal de formules établi dans le cas de la lentille reste valable ici, moyennant quelques légères modifications de notations. J'ai donc calculé numériquement le miroir électronique et la variation de son pouvoir de convergence.

J'ai consacré ensuite quelques paragraphes à des problèmes spéciaux, tels que le miroir à deux électrodes ou l'influence de la position du point d'inflexion de la courbe du potentiel sur les caractéristiques optiques de la lentille.

J'ai étudié en détail le problème des lentilles à électrode centrale épaisse et montré l'importance que présente le paramètre « épaisseur » dans la réalisation judicieuse des objectifs et des lentilles de projection.

Moyennant certaines hypothèses, j'ai résolu l'équation générale du mouvement de l'électron dans un système de révolution. Les expressions ainsi trouvées pour les trajectoires transgaussiennes sont notablement plus compliquées que les formules établies pour le cas gaussien. Le fonctionnement de la lentille

dépend ici de deux paramètres : x , défini par la nature de la lentille, et $\frac{r_0}{z_0}$ imposé par l'incidence du rayon. J'ai montré que, habituellement, lorsque $\frac{r_0}{z_0}$ augmente, la lentille se comporte comme si x diminuait.

J'ai donné des formules qui permettent de calculer les éléments optiques des lentilles fonctionnant en régime transgaussien. La valeur de l'incidence limite r_0' qui sépare la « zone lentille » de la « zone miroir » est également déterminée en fonction des dimensions de la lentille et des tensions qui lui sont appliquées.

J'ai insisté sur la nature particulière des images obtenues en régime transgaussien et j'ai donné des formules explicites pour le calcul des aberrations géométriques principales dans le plan image.

Les équations de la caustique, très compliquées, n'ont pas été résolues numériquement, j'ai cependant indiqué la forme de la caustique dans un cas particulier ($x = 0,1$).

La marche des rayons obliques a été encadrée dans des formules qui permettent de calculer numériquement les aberrations d'un point situé en dehors de l'axe.

J'ai calculé ensuite le régime transgaussien de la lentille électrostatique indépendante à électrode centrale épaisse.

J'ai enfin indiqué les limites de cette théorie et les moyens de la perfectionner.

Quelques clichés originaux, montrant le comportement de la lentille indépendante à champ elliptique en régime transgaussien ont été donnés à la fin de l'exposé.

Partout où cela a été possible, la théorie a été confrontée avec l'expérience pour vérifier les résultats obtenus. L'accord est, en général, très bon.

Une grande partie de ce travail a été effectuée au Laboratoire d'Optique Électronique de la Compagnie Générale de Télégraphie sans Fil.

J'exprime ici ma vive reconnaissance à M. Maurice Ponte, Directeur Général de cette Compagnie, qui m'a encouragé à poursuivre toutes ces recherches et m'a donné les moyens de les mener à bien.

J'adresse également mes remerciements à M. Yves Rocard, Professeur à la Sorbonne, Directeur du Laboratoire de Physique à l'École Normale Supé-

rieure, qui m'a accueilli dans ses établissements et m'a permis d'y achever ce travail.

Je dois une gratitude toute particulière à M. Pierre Grivet, Professeur à la Sorbonne, Directeur du Laboratoire de Radioélectricité de l'École Normale Supérieure. Je me fais un plaisir de lui exprimer ici ma profonde reconnaissance pour sa constante bienveillance, pour l'intérêt qu'il n'a cessé de porter à mon travail et pour les encouragements qu'il m'a toujours prodigués.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] H. BRUCK, *Sur les propriétés de quelques lentilles électrostatiques indépendantes* (Cahiers de Physique, octobre 1944, p. 15-28).
- [2] P. CHANSON, *Thèse de Doctorat*, Paris, 1947.
- [3] E. ERTAUD, *Thèse de Doctorat*, Paris, 1946.
- [4] A. RECKNAGEL, *Zur Theorie des Elektronenspiegels* (Z. Physik, t. 104, 1937).
- [5] R. RUDENBERG, *Electron lenses of hyperbolic field structure* (J. Franklin Inst., 1948, p. 311 et 377).
- [6] E. REGENSTREIF, C. R. Acad. Sc., t. 230, 1950, p. 1650-1652.
- [7] G. MOLLENSTEDT et F. HEISE, *Physikalische Blätter*, t. 2, 1949, p. 82-83.
- [8] E. BRUCHE et O. SCHERZER, *Geometrische Elektronenoptik*, Berlin, 1934, p. 65.
- [9] ZWORYKIN, *Electron Optics and the Electron microscope*, New-York, 1946, p. 377.
- [10] ZWORYKIN, *loc. cit.*, p. 385.
- [11] E. REGENSTREIF, C. R. Acad. Sc., t. 229, 1949, p. 1311-1313.
- [12] J. PICT, *Ann. Physik*, t. 15, 1932, p. 926.
- [13] ZWORYKIN, *loc. cit.*, p. 437.
- [14] E. REGENSTREIF, C. R. Acad. Sc., t. 230, 1950, p. 630-632.
- [15] A. RECKNAGEL, *Jb. All. Elekt. Ges.*, t. 7, 1940, p. 15.
- [16] F. BERTEIN, *Annales de Radioélectricité*, t. 2, n° 10, octobre 1947; t. 3, n° 11, janvier 1948.
- [17] W. GLASER, *Zeitschrift für Physik*, t. 120, p. 11-15, 1943.
- [18] J. HILLIER, *J. Appl. Phys.*, janvier 1947, p. 48-71.
- [19] E. REGENSTREIF, *Demande de Brevet français* n° 602-960 du 11 janvier 1951.
- [20] E. REGENSTREIF, *Annales de Radioélectricité*, t. 2, 1947, p. 348-358.
- [21] P. GRIVET, F. BERTEIN et H. BRUCK, *Annales de Radioélectricité*, t. 2, 1947, p. 249-253.
- [22] H. BRUCK, R. RÉMILLON et L. ROMANI, C. R. Acad. Sc., t. 226, 1948, p. 650-652.
- [23] F. BERTEIN et E. REGENSTREIF, C. R. Acad. Sc., t. 224, 1947, p. 737-739.
- [24] K. HEUN, *Zur Theorie der Riemannschen Funktionen* (Math. Ann., t. 33, p. 161-179).
- [25] H. MAHL et A. RECKNAGEL, *Über Öffnungsfehler von elektrostatischen Elektronenlinsen* (Z. Physik., t. 122, 1944, p. 660-679).
- [26] F. HEISE et O. RANG, *Experimentelle Untersuchungen an elektrostatischen Elektronenlinsen* (Optik, juillet 1949, p. 204-216).
- [27] E. REGENSTREIF, *Demande de brevet français* n° 604.734 du 13 février 1951.
- [28] F. HEISE, *Bestimmung von Verzeichnung und Öffnungsfehler elektrostatischer Linsen* (Optik, novembre-décembre 1949, p. 479-489).
- [29] P. GRIVET et Y. ROCARD, *La réaction dans les chaînes et réseaux d'analogie électrique* (Revue Scientifique, avril-juin 1949).
- [30] F. BERTEIN et E. REGENSTREIF, *Emploi des rayons marginaux dans l'étude des dissymétries chez les lentilles électrostatiques* (C. R. Acad. Sc., t. 228, 1949, p. 1854-1856).
- [31] P. GRIVET, F. BERTEIN et E. REGENSTREIF, *The use of marginal rays for the study of assymetry in electrostatic lenses* (Proceedings of the Conference on Electron Microscopy, Delft, juillet 1949).

DEUXIÈME THÈSE



PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

L'accélérateur linéaire de particules.

Vu et approuvé :

Paris, le 24 février 1951.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

A. CHÂTELET.

Vu et permis d'imprimer :

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

JEAN SARRAILH.



PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS
138058 Quai des Grands-Augustins, 55.
